CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

miejsce na naklejkę

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **kwiecień 2020 r.**
CZAS PRACY: **270 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

NOWA FORMUŁA

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 55 stron (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. W rozwiązaniach zadań rachunkowych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.

MMA-R1_**4**P

7. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, linijki oraz kalkulatora prostego.
8. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL
   i przyklej naklejkę z kodem.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

Zadanie 1. (0–1)

Niech $L = \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4$. Wtedy

A. $L = 1$

B. $L = 2$

C. $L = 3$

D. $L = 4$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

Zadanie 2. (0–1)

Okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y+7)^2=625$ jest styczny do okręgu o środku $S=(12,5)$ i promieniu r. Wynika stąd, że

A. $r=5$
B. $r=15$
C. $r=10$
D. $r=20$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$ jest równa

A. 1
B. -1
C. $3-2\sqrt{2}$
D. $2\sqrt{2}+1$

Zadanie 4. (0–1)

Spośród poniższych nierówności wskaż tę, którą spełniają dokładnie trzy liczby całkowite.

A. $\left|\frac{3}{4}x+5\right|<2$

B. $\left|\frac{4}{3}x+5\right|<2$

C. $\left|\frac{3}{5}x+4\right|<2$

D. $\left|\frac{4}{5}x+3\right|<2$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

Zadanie 5. (0–2)

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A = \left(6, \frac{36}{5}\right)$ tego wykresu.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

Zadanie 6. (0–3)

W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC.

Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.

Zadanie 7. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność $\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \frac{1}{4}$.

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że równanie $x^8 + x^2 = 2\left(x^4 + x - 1\right)$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x = 1$.

Zadanie 9. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

Odpowiedź:

....

....

Zadanie 10. (0–4)

Dany jest rosnący ciąg geometryczny $\left(a, aq, aq^2\right)$, którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

Odpowiedź:

....

....

Zadanie 11. (0–4)

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2 + y^2 = 2^{11-n}$, $n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k}. Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k, gdzie $k \geq 1$.

Odpowiedź:

....

....

Zadanie 12. (0–5)

Trapez prostokątny ABCD o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10, a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD. Oblicz pole tego trapezu.

Odpowiedź:

....

....

Zadanie 13. (0–5)

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB, BC i CA w punktach – odpowiednio – $P=(0,10), Q=(8,6)$ i $R=(9,13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A, B i C tego trójkąta.

Odpowiedź:

....

....

Zadanie 14. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2, spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$.

Odpowiedź:

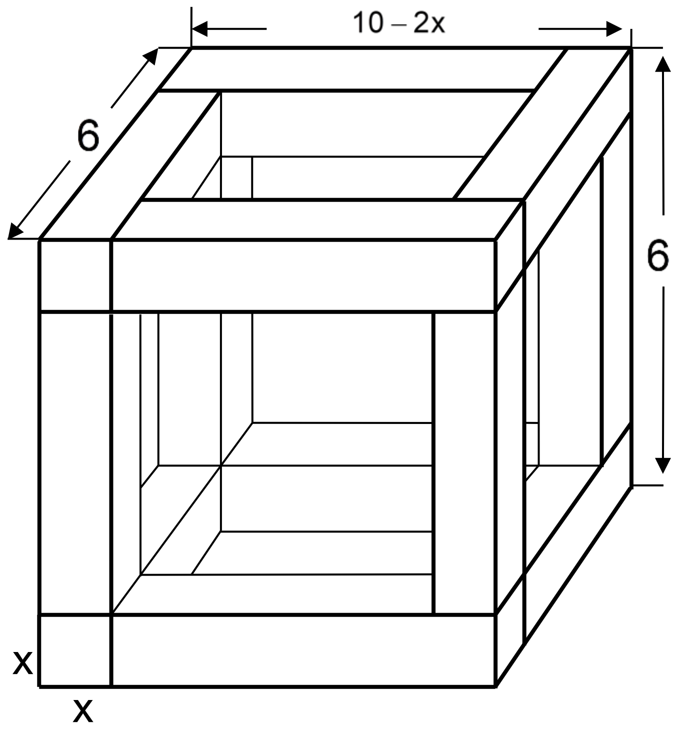
....

....

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.

a) Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x.
b) Wyznacz dziedzinę funkcji V.
c) Oblicz tę wartość x, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.



Odpowiedź:

....

....

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)