



Ministry
of Finance

Republic
of Poland

No 30-2018
June 2018

MF Working Paper Series



Dominik Korniluk

Optymalizacja polityki finansowej samorządów

MINISTRY OF FINANCE
REPUBLIC OF POLAND

Any reprinting or dissemination of this material requires previous acceptance of the Ministry of Finance in Poland. Upon quoting, please refer to the source.

Optymalizacja polityki finansowej samorządów

Dominik Korniluk*

21 czerwca 2018

*Szkoła Główna Handlowa w Warszawie i Ministerstwo Finansów. Mail: dominik.korniluk@mf.gov.pl.
Artykuł stanowi bardzo nieznacznie zmodyfikowaną część rozprawy doktorskiej opracowanej i obronionej 5 czerwca 2018 w Kolegium Analiz Ekonomicznych Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie pod kierunkiem dr hab. Jakuba Growca, prof. SGH. Autor pragnie złożyć podziękowania Promotorowi za cenne uwagi, które przyczyniły się do udoskonalenia pracy. Poglądy wyrażone w niniejszym artykule powinny być traktowane jako poglądy autora, które nie muszą koniecznie wyrażać poglądów Ministerstwa Finansów.

Spis treści

Streszczenie	5
Abstract	6
Wprowadzenie	7
1 Polityka finansowa samorządów w świetle literatury	9
1.1 Teorie dawne (pierwszej generacji)	9
1.2 Kwestia stopnia decentralizacji władzy i teorie wyboru publicznego	11
1.3 Współczesne teorie fiskalnego federalizmu	12
1.4 Badania poświęcone polityce samorządowej w Polsce	12
2 Model decyzyjny władz samorządowych	13
2.1 Preferencje	14
2.2 Ograniczenia budżetowe	15
2.3 Reguły fiskalne zapobiegające eksplozji długu	17
3 Rozwiązanie modelu	18
3.1 Zapis rozwiązania modelu za pomocą warunków Karusha-Kuhna-Tuckera	18
3.2 Analityczne rozwiązanie dla czwartego roku z napiętym warunkiem IWZ	20
3.3 Analityczne rozwiązanie dla trzeciego roku z napiętym warunkiem IWZ	24
3.4 Numeryczna metoda rozwiązania modelu	27
4 Dobór wartości parametrów strukturalnych modelu	32
4.1 Kalibracja parametrów i wartości startowych modelu w oparciu o dane empiryczne dla Polski	33
4.1.1 Limit dochodów unijnych	33
4.1.2 Udział finansowania własnego inwestycji unijnych	33
4.1.3 Stopa procentowa i stopa zapadalności długu	34
4.1.4 Wskaźnik zadłużenia	36
4.1.5 Dynamika dochodów bieżących	37
4.1.6 Wskaźnik wydatków bieżących	38
4.1.7 Wskaźnik wartości infrastruktury	38
4.1.8 Stopa deprecjacji infrastruktury	40
4.2 Analiza struktury warunków ograniczających	40
4.3 Kalibracja wartości parametrów behawioralnych α i β	42
5 Rozwiązanie numeryczne modelu oraz analiza wrażliwości optymalnych poziomów wydatków bieżących i inwestycyjnych	45
5.1 Wyniki analizy wrażliwości dla scenariusza rozwiązanego analitycznie z ustalonymi: strukturą warunków ograniczających oraz α i β	46
5.2 Rozwiązanie numeryczne pełnego modelu oraz wyniki analizy wrażliwości	48
Podsumowanie części II	52
Uwagi końcowe i wnioski	54
Literatura	55
Aneks	59
A Rozwiązanie dla czwartego roku	59

A.1	Przykładowe rozwiązanie wariantu I	61
A.2	Przykładowe rozwiązanie wariantu II	62
A.3	Przykładowe rozwiązanie wariantu IV	65
B	Analityczne rozwiązanie dla trzeciego roku z napiętym warunkiem IWZ - szczegółowe obliczenia	66
C	Rozwiązanie dla trzeciego roku	71
C.1	Przykładowe rozwiązanie metodą analityczną	71
C.2	Przykładowe rozwiązanie metodą numeryczną	78
C.3	Przykładowe rozwiązanie za pomocą warunków I rzędu	81
D	Model o nieskończonym horyzoncie czasowym	85

Streszczenie

Dzięki modelowi optymalizacyjnemu polityki finansowej samorządów, zweryfikowane zostały hipotezy o wpływie wybranych czynników na optymalny poziom w relacji do dochodów bieżących: wydatków bieżących oraz inwestycyjnych. Potwierdzono hipotezę, że większa wartość infrastruktury powoduje zwiększenie wydatków bieżących samorządów. Pokazano także, iż wzrost: stopy deprecjacji infrastruktury, zadłużenia w relacji do dochodów bieżących i, w mniejszym stopniu, stopy współfinansowania inwestycji unijnych wpływa negatywnie na poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących. Oddziaływanie stopy procentowej zaś okazało się być ujemne lub neutralne. Zwiększenie czynnika dyskontowego wywiera różny efekt na wydatki bieżące w zależności od okresu. Nieoczekiwany efekt zaobserwowano w odniesieniu do wskaźnika wydatków bieżących poniesionych przed rozpoczęciem modelowanego okresu. Wyższe przeszłe wydatki ograniczają przestrzeń na wydatki bieżące na początku badanego okresu, ale w kolejnym roku następuje efekt kompensacji, tj. uprzednie oszczędności umożliwiają większe wydatki w porównaniu ze scenariuszem bez oszczędności.

Stwierdzono także, że dodatni wpływ na inwestycje zwykłe (tj. niewspółfinansowane ze środków unijnych) w relacji do dochodów bieżących ma wzrost stopy deprecjacji infrastruktury oraz czynnika dyskontowego. Potwierdzona została także hipoteza o ujemnym wpływie na inwestycje zwykłe w relacji do dochodów bieżących wzrostu: stopy procentowej, stopy zapadalności zadłużenia i wskaźnika infrastruktury. Pozytywnie zweryfikowano również hipotezę o ujemnym wpływie wzrostu limitu dochodów unijnych. W przypadku wskaźnika zadłużenia można także doszukać się efektu kompensacji - ujemny wpływ występuje tylko na początku okresu. Efekt ten występuje również w odniesieniu do wskaźnika inwestycji zwykłych w roli zmiennej objaśnianej i wskaźnika przeszłych wydatków bieżących jako zmiennej objaśniającej. Okazał się on nawet silniejszy niż w przypadku wydatków bieżących jako zmiennej objaśnianej. Optymalny poziom wydatków inwestycyjnych co do zasady maleje w czasie, co jest konsekwencją przyjętej funkcji użyteczności, która premiuje inwestycje poczynione we wcześniejszym okresie, gdyż poprawiona w ten sposób infrastruktura jest uwzględniana wielokrotnie w użyteczności.

Słowa kluczowe: polityka finansowa, samorzady, JST, optymalizacja

JEL: C61, H72, H74

Abstract

In this paper, hypotheses of an impact of the selected factors on the optimal level of current and investment expenditure of local government were verified, based on a novel optimization model of local government financial policy. The hypothesis about the positive impact of value of infrastructure on the current expenditure level was confirmed. It was also shown that an increase in: the rate of infrastructure depreciation, interest rate, debt level and the discount rate of future utility influence negatively the level of current expenditure. An unexpected effect was observed concerning the current expenditure incurred before the modeled period, namely higher past expenses reduce the space for current spending at the beginning of the considered period, but in the next year there is a compensation effect, i.e. former savings allow for higher expenditure than in a scenario without the savings.

It was also found that an increase in the rate of infrastructure depreciation and the discount rate has a positive impact on the ordinary investment (i.e. not funded from the EU funds). Similarly, hypothesis was confirmed about a negative impact of: the interest rate, the debt maturity rate, the debt level and the value of infrastructure on ordinary investment. In the case of debt, however, there is a compensation effect - similar to the one described in the former paragraph. Such an effect occurs also for ordinary investment as a response variable and the past current expenditure as an explanatory variable. It turned out to be even stronger than for the current expenditure as a response variable. The optimal level of investment expenditure declines over time, which is a consequence of an adopted utility function. This function rewards investment realized earlier, because the infrastructure improved in this way is included several times in the utility.

Keywords: financial policy, local governments, LGU, optimization

JEL: C61, H72, H74

Wprowadzenie

Aby zrealizować cel paperu, wszechstronnej dyskusji poddano determinanty optymalnych poziomów wydatków bieżących i inwestycyjnych gmin oraz miast powiatowych. Analizowanie podsektora lokalnego sektora finansów publicznych jako agregatu nie byłoby bowiem wskazane z uwagi na jego heterogeniczność. Inherentną cechą samorządów jest przecież możliwość kształtowania własnej specyficznej polityki finansowej. Badanie polityk wszystkich jednostek samorządowych oddzielnie byłoby jednak zadaniem zbyt złożonym, dlatego w pracy skoncentrowano się na analizie reprezentatywnego samorządu optymalizującego swoją funkcję celu przy warunkach ograniczających.

Zbudowano model decyzyjny władz gminy lub miasta powiatowego. Teoretyczne rozkłady parametrów modelu oszacowano z wykorzystaniem danych empirycznych dla Polski z lat 2010-2015. Model rozwiązano częściowo w sposób analityczny, a częściowo - tam, gdzie uzyskanie rozwiązania analitycznego nie jest możliwe - numeryczny, za pomocą nowatorskiej metody meta-algorytmu wykorzystującego jednocześnie kilkanaście algorytmów optymalizacyjnych. Wybrane zostały wartości parametrów behawioralnych, które prowadziły do optymalnych rozwiązań bliskich wartościom empirycznym. Z odpowiednich rozkładów wylosowano następnie wiele zestawów parametrów, którym przypisano optymalne wartości wydatków bieżących oraz inwestycyjnych. Zależność między wartościami parametrów a rozwiązaniami optymalnymi została przedstawiona na podstawie liniowych meta-modele ekonometrycznych.

W niniejszej pracy postawiono następujące hipotezy:

Optymalna polityka finansowa gmin i miast powiatowych uwzględnia wiele czynników:

1. Dodatni wpływ na optymalny poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: wskaźnika wartości infrastruktury oraz limitu dofinansowania unijnego.
2. Ujemny wpływ na optymalny poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: czynnika dyskontowego, współczynnika deprecjacji infrastruktury, udziału dochodów własnych w inwestycjach unijnych, stopy procentowej, stopy zapadalności długu, wskaźnika zadłużenia oraz wskaźnika wydatków bieżących z lat poprzednich.
3. Dodatni wpływ na optymalny poziom zwykłych wydatków inwestycyjnych (tj. niewspółfinansowanych ze środków UE) w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: czynnika dyskontowego, współczynnika deprecjacji infrastruktury oraz udziału dochodów własnych w inwestycjach unijnych.
4. Ujemny wpływ na optymalny poziom zwykłych wydatków inwestycyjnych w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: stopy procentowej, stopy zapadalności długu, wskaźnika zadłużenia, wskaźnika wydatków bieżących z lat poprzednich, wskaźnika wartości infrastruktury oraz limitu dofinansowania unijnego.

Rozdział pierwszy przegląd literatury dotyczącej optymalnej alokacji dóbr w sektorze lokalnym. W rozdziale drugim przedstawiono model decyzyjny władz samorządowych oraz sposób jego rozwiązania analitycznego z wykorzystaniem warunków Karusha-Kuhna-Tuckera. W rozdziale trzecim wyprowadzono analityczne rozwiązanie dla trzeciego i czwartego roku kadencji prezydenta miasta, burmistrza lub wójta gminy. Opisano też numeryczny meta-algorytm optymalizacyjny dla wszystkich czterech lat kadencji władz samorządowych. Czwarty rozdział zawiera opis użytych danych, a także opis dopasowania rozkładów teoretycznych do rozkładów empirycznych parametrów strukturalnych modelu. Przeanalizowano w nim także strukturę warunków ograniczających i dokonano kalibracji parametrów behawioralnych. Rozdział piąty

poświęcono analizie wrażliwości optymalnych poziomów wydatków bieżących i inwestycyjnych względem wartości parametrów. Został on oparty na wynikach oraz oszacowaniach liniowych meta-modeli ekonometrycznych. Pracę kończy rozdział podsumowujący. Praca została uzupełniona o aneksy A, B i C, w których zamieszczono kody programu R, zawierające przykładowe rozwiązania modelu za pomocą metody analitycznej i numerycznej oraz o aneks D prezentujący pomocniczy model o nieskończonym horyzoncie decyzyjnym.

Celem pracy jest sformułowanie optymalnej polityki finansowej samorządów w zakresie wydatków bieżących oraz inwestycyjnych gmin i miast powiatowych w ciągu czteroletniej kadencji władz samorządowych. Zgodnie z ustaleniami zawartymi w powiązanej literaturze, przyjęto założenie, że optymalna polityka powinna uwzględniać regułę zrównoważonego wyniku bieżącego i indywidualny wskaźnik zadłużenia. Powinna też zależeć od: parametrów określających preferencje samorządów, stopy procentowej, zapadalności długu, tempa wzrostu dochodów bieżących, stopy amortyzacji, początkowych wskaźników zadłużenia, wydatków bieżących oraz poziomu infrastruktury, a także limitu funduszy przeznaczonych na inwestycje unijne i udziału środków unijnych w finansowaniu inwestycji.

1 Polityka finansowa samorządów w świetle literatury

Literatura poświęcona optymalnej alokacji dóbr na poziomie lokalnym i - generalnie - polityce fiskalnej samorządów, czyli tzw. „fiskalnemu federalizmowi”, jest bogata i różnorodna, acz nie wiąże się aż tak silnie z bieżącymi wydarzeniami politycznymi jak literatura na temat reguł fiskalnych oraz polityki fiskalnej prowadzonej na szczeblu centralnym. Oates (2005) wyróżnił w jej ramach trzy nurty: 1) teorii dawnych (pierwszej generacji), 2) teorii wyboru publicznego oraz 3) teorii współczesnych (drugiej generacji, patrz też Weingast, 2009). Przełomowe prace na temat alokacji dóbr publicznych, w tym samorządowych, zostały opublikowane w latach '50 XX wieku. Zaliczają się one do teorii dawnych według klasyfikacji Oatesa.

1.1 Teorie dawne (pierwszej generacji)

Samuelson (1955) stwierdził, że nie istnieje mechanizm rynkowy, który doprowadziłby do zdecentralizowanej i efektywnej alokacji dóbr publicznych. Myśl tę rozwinął później Varian (2002), opisując potencjalne sposoby rozwiązania tego problemu i wskazując na słabości każdego z nich. Przykładowo, można by posłużyć się mechanizmem głosowania, lecz okazuje się, że nie jest on doskonałą metodą, m. in. dlatego, że jego wynik może być wrażliwy na kolejność głosowanych opcji. Alternatywnie, można przyjąć, że koszt wytworzenia dobra publicznego ponosiliby jego użytkownicy proporcjonalnie do użyteczności, jaką by z niego czerpali. Jednak racjonalnemu konsumentowi opłacałoby się wówczas zaniżać swoje ujawniane preferencje, aby ponieść mniejszy, a nawet zerowy, udział w finansowaniu dobra publicznego, z którego tak czy inaczej będzie korzystał (typowy efekt gapowicza). Z kolei założenie stałego kosztu finansowania dobra publicznego powoduje to, że osoby optujące za (przeciw) wytworzeniem dobra publicznego mogą zawyżać (odpowiednio zaniżać) swoje ujawniane preferencje.

W celu nakłonienia konsumentów do ujawnienia ich rzeczywistych preferencji można zastosować podatek Grovesa - Clarke'a (Clarke, 1971 i Groves, 1973). Podatek ten opłaca jedynie kluczowy głosujący, czyli ten, bez którego decyzja grupy różniłaby się od decyzji podjętej razem z nim. Dzięki temu podatnik internalizuje koszty społeczne podejmowanej przez siebie decyzji. Wysokość podatku jest równa stracie tej części grupy, która przegrała głosowanie z powodu „kluczowego głosu”. Taki podatek sprawia, że racjonalny głosujący wskazuje rzeczywistą użyteczność (netto), jaką czerpie z danego dobra publicznego, dzięki czemu wybierany jest optymalny poziom tego dobra z punktu widzenia społeczeństwa. Podobnie, jak uprzednio przytoczone metody, również podatek Grovesa-Clarke'a nie jest idealnym rozwiązaniem. Wymaga on, aby preferencje konsumentów były quasi-liniowe (tzn. żeby na użyteczność z konsumpcji dobra publicznego nie wpływał poziom konsumowanego dobra prywatnego). Ponadto, podatek ten nie prowadzi do alokacji Pareto-efektywnej, gdyż konsumpcja prywatna kluczowych głosujących mogłaby być wyższa. Wynika to z faktu, iż ów hipotetyczny podatek musi stanowić czystą stratę społeczeń-

stwa. Nie może on bowiem trafić do zwykłych głosujących, gdyż miałyby to wpływ na ujawnianie przez nich preferencje.

Z tezą Samuelsona (1955) nie zgadzał się Tiebout. W swoim słynnym artykule, Tiebout (1956) przekonywał, iż może istnieć efektywne, przynajmniej w przybliżeniu, pseudo-rynkowe rozwiązanie w odniesieniu do lokalnych dóbr publicznych. Takie dobra mogą jednocześnie konsumować jednostki danej społeczności lokalnej (np. gminy), a nie całej populacji. Zaproponowany przez Tiebouta mechanizm prowadzący do efektywnej alokacji polegał na tzw. „głosowaniu nogami”, tzn. przeprowadzaniu się konsumentów do tych gmin, które zapewniają najbardziej odpowiedni, według ich preferencji, zestaw dóbr publicznych.

Tiebout wymienił siedem założeń, na których oparł swój model:

- 1) pełna mobilność konsumentów-głosujących;
- 2) pełna informacja o różnicach pomiędzy wydatkami na dobra publiczne i podatkami w gminie (społeczności);
- 3) duża liczba gmin, spośród których konsumenci mogą wybierać;
- 4) brak bezrobocia, każdy żyje z egzogenicznego dochodu pochodzącego z dywidend;
- 5) usługi publiczne świadczone przez jedną gminę nie mają wpływu na użyteczność mieszkańców innych gmin (brak efektów zewnętrznych);
- 6) dla każdego wariantu zestawu usług w gminie istnieje optymalna liczba mieszkańców, która zapewnia minimalny przeciętny koszt świadczenia owych usług - oznacza to, że musi istnieć pewien czynnik produkcji lub zasób, np. ograniczone terytorium albo plaża o z góry ustalonej wielkości;
- 7) jeżeli w danej gminie liczba mieszkańców jest niższa od optymalnej, to gmina próbuje przyciągnąć nowych mieszkańców, aby obniżyć średni koszt usług. W sytuacji odwrotnej, gmina zachęca część mieszkańców do wyprowadzki.

Należy też odnotować wymogi niewymienione przez Tiebouta *explicite*. Po pierwsze, konieczność wystarczająco dużej liczby konsumentów o podobnych preferencjach - tak, aby zaistniały korzyści skali w produkcji dóbr publicznych. Po drugie, model wymagał podatku nałożonego na każdą osobę w takiej samej wysokości, co w rzeczywistości jest niespotykane. Gdyby bowiem podatek był uzależniony od wartości nieruchomości, wówczas konsumenci woleliby mieszkać z bogatymi sąsiadami, aby uzyskać większą ilość dóbr publicznych niż wynikałoby to z ich podatków. Bogatsi mieszkańcy w takiej sytuacji próbowaliby narzucić ograniczenia (np. poprzez plan zagospodarowania przestrzennego) uniemożliwiające nabywanie tanich mieszkań w ich gminie. Po trzecie, brak kosztów przeprowadzki i brak problemu ze znalezieniem pracy w innym mieście.

Tiebout był świadomy, że równowagowe rozwiązanie jego modelu może być optymalne, w odniesieniu do użyteczności konsumentów, jedynie w przybliżeniu. Przykładowo, do pewnej gminy mogłoby chcieć się wprowadzić więcej konsumentów niż wynosiłaby liczba mieszkańców tej gminy minimalizująca średni koszt dóbr publicznych. Część osób musiałaby więc zdecydować się na gminę znajdującą się na drugim miejscu prywatnego rankingu. Ogólnie rzecz biorąc, całkowita efektywność alokacji wymagałaby nieskończonej liczby gmin - tak, aby każdy konsument mógł wybrać gminę z idealnym, z jego punktu widzenia, zestawem usług. Jednak model opisujący np. jednoosobowe gminy byłby, zdaniem Tiebouta, zbyt oderwany od rzeczywistości.

Na podstawie modelu Tiebouta można stwierdzić, że dobra publiczne powinny być finansowane przez samorządy, jeżeli:

- 1) służą większości mieszkańców (wtedy widzą oni efekt płacenia podatków lokalnych i dzięki temu nie unikają tych opłat);
- 2) nie wywołują efektów zewnętrznych;
- 3) ich produkcja nie cechuje się bardzo dużymi korzyściami skali (jak np. obrona narodowa).

Choć model Tiebouta opierał się na wielu założeniach, dalsze prace wykazały, że należy na niego jeszcze nałożyć dodatkowe warunki, aby liczba gmin, alokacja osób pomiędzy gminami i poziom dostarczanych usług publicznych były efektywne. Jednym z artykułów, który stanowi krytykę modelu Tiebouta, jest praca Bewleya (1981) dowodząca, że w modelu Tiebouta nie można znaleźć Pareto-efektywnej równowagi. Zasadniczy powód to niewiedza konsumentów o tym, iż ich przeprowadzki wywarłyby wpływ na zmianę ilości dóbr publicznych oferowanych przez samorządy, co przyczyniłoby się do zwiększenia użyteczności konsumentów. Inne powody stanowią: niemożność różnicowania stawek podatkowych obowiązujących bardziej i mniej pracowitych podatników, a także mechanizm ciągłej ucieczki bardziej produktywnych mieszkańców przed mniej produktywnymi. Teoria Tiebouta miała pokazać, w jaki sposób mogłoby dojść do efektywnej alokacji dóbr publicznych. Bewley stawia zarzut, że aby wykazać ową efektywność, należy poczynić tak liczne i silne założenia, że lokalne dobra publiczne de facto mają cechy dóbr prywatnych, a sposób alokacji sprowadza się do rozwiązania znalezionej już wcześniej w teorii równowagi ogólnej.

1.2 Kwestia stopnia decentralizacji władzy i teorie wyboru publicznego

Teorie dawne, według Oatesa (2005), często sprowadzały się do wyboru między decentralizacją a centralizacją władzy. Przy założeniu, że wszyscy politycy maksymalizują dobrobyt wyborców, decentralizacja przyczynia się do wzrostu użyteczności obywateli. Polityka może zostać wtedy lepiej skrojona pod potrzeby poszczególnych regionów, różniących się pod względem preferencji mieszkańców. Takie rozwiązanie zostało nazwane przez Olsona (1969) „ekwiwalencją fiskalną”.

Z drugiej strony, nie można wykluczyć, że rząd centralny byłby w stanie zarządzać różnymi regionami, uwzględniając ich specyfikę - modele takiego rządu zostały przedstawione w artykułach zaliczanych do drugiej generacji: Lockwooda (2002) oraz Besleya i Coate'a (2003). Istotny jest tu fakt, że dobra wytwarzane w jednym regionie mogą wywierać pozytywne lub negatywne efekty zewnętrzne wobec innych regionów. Jeżeli tej zawodności polityki samorządów nie można naprawić za pomocą wyrównawczych transferów w stylu Pigou (1920), będzie stanowiła ona, podobnie jak możliwość różnicowania polityki regionalnej przez rząd, argument za centralizacją. Besley i Coate zwracają ponadto uwagę na to, że jeżeli rząd jest wyłaniany jako większościowa koalicja przedstawicieli regionów, może to powodować dyskryminację regionów, których przedstawiciele nie wejdą do koalicji. Z drugiej strony, rząd kooperujący, uwzględniający interesy wszystkich regionów ma tendencję do zawyżania wydatków publicznych. Dzieje się tak, ponieważ mieszkańcy danego regionu wolą paradoksalnie wybrać polityka o silniejszych poglądach etatystycznych niż poglądy mieszkańców. Taki polityk, w ramach koalicji rządzącej, wpłynie bowiem na zwiększenie wydatków publicznych także w pozostałych regionach, co za sprawą efektów zewnętrznych i braku konieczności finansowania tych wydatków, przyniesie wyższą użyteczność mieszkańcom regionu, z którego został wybrany.

W przeciwieństwie do wyżej cytowanych artykułów poświęconych polityce lokalnej, w teoriach wyboru publicznego politycy mają własne preferencje - inne niż reszta społeczeństwa. Politykom, w tym władzom samorządowym, może np. zależeć na maksymalizacji wydatków budżetowych, aby poszerzyć swoje wpływy. Zdaniem Brennana i Buchanana (1980), rywalizacja o wyborców zachodząca pomiędzy jednostkami samorządowymi mogłaby przyczynić się do ograniczenia nadmiernego udziału państwa w gospodarce. Jednak Rodden (2003) zauważył, że ten pozytywny

wpływ decentralizacji może zajść tylko wtedy, gdy wydatki lokalne są finansowane z lokalnych podatków, a nie dotacji z budżetu centralnego.

1.3 Współczesne teorie fiskalnego federalizmu

Współczesne teorie fiskalnego federalizmu, mimo że różnorodne, mają przeważnie dwie cechy wspólne. Po pierwsze, podobnie jak teorie nawiązujące do wyboru publicznego, zakładają różne funkcje celu u polityków i wyborców. Przykładowo, Prud'homme (1995) pokazał, że większa decentralizacja zmniejsza możliwość prowadzenia przez rząd centralny aktywnej, antycyklicznej polityki fiskalnej. Rząd centralny dysponuje bowiem mniejszą kwotą wydatków. Ponadto, władze samorządowe zwykły wydawać więcej pieniędzy w okresie przedwyborczym, wywołując w ten sposób cykle polityczne - niekoniecznie zbieżne z cyklem koniunkturalnym w kraju.

Po drugie, współczesne teorie (drugiej generacji) akcentują problematykę niepełnej informacji. Przykład stanowią prace wykorzystujące model pryncypała i agenta, przy czym pryncypałem są władze centralne (np. Levaggi, 2002) lub wyborcy (np. Tommasi i Weinschelbaum, 2007), a agentem - władze lokalne. Z kolei wybory rządzących podyktowane m.in. obietnicami składanymi w trakcie kampanii wyborczej, zostały przeanalizowane przez Seabrighta (1996) w oparciu o model niepełnych kontraktów.

Kolejna grupa współczesnych artykułów porusza zagadnienie twardych i miękkich ograniczeń budżetowych - pojęć spopularyzowanych przez Kornai (1979, 1980). Kornai odnosił te pojęcia do firm, odpowiednio, kapitalistycznych i socjalistycznych. Wskazywał na nieefektywne zachowania przedsiębiorstw, podlegających miękkim ograniczeniom budżetowym, w szczególności na ich nigdy niezaspokajany popyt, wynikający z niewrażliwości na koszty. Podobnie, samorządy przekraczają swoje ograniczenia budżetowe, nadmiernie się zadłużając i licząc na pomoc ze strony budżetu centralnego. Władze centralne starają się przekonać samorządy, aby zacieśniły swoją politykę wydatkową, ponieważ w przeciwnym razie nie uzyskają wsparcia. Takie zachowania są analizowane przy użyciu narzędzi teorii gier. Przykładowo, praca Goodspeeda (2002) odwołuje się do modelu Stackelberga; natomiast Inman (2003) wykorzystuje grę w „dylemat więźnia”, której wynikiem może być albo bankructwo albo ratunek finansowy dla samorządu. Warto dodać, że aby uczynić ograniczenie budżetowe jednostek samorządowych twardszym, należy odpowiednio zaprojektować system podatków i dotacji, prawo upadłościowe, a także reguły fiskalne.

1.4 Badania poświęcone polityce samorządowej w Polsce

Rzadziej można spotkać w literaturze badania empiryczne poświęcone polityce polskich samorządów. Przykładowo, rozbudowany model opisujący politykę finansową jednostek samorządu terytorialnego w latach, w których dużą rolę odgrywa finansowanie unijne, znajduje się w pracy Sieraka i in. (2013). Celem budowy tego modelu było „oszacowanie środków niezbędnych do zapewnienia krajowego wkładu publicznego do projektów realizowanych w ramach 2014-2020”. Dokładniej mówiąc, chodziło o „określenie możliwej do sfinansowania - zgodnie z ograniczeniami prawnymi - kwoty wydatków inwestycyjnych, zarówno tych, które podlegają refundacji ze środków UE (wraz z koniecznym współfinansowaniem), jak i tych, które nie są ponoszone w związku z realizacją projektów unijnych”.

W przeciwieństwie do modelu omawianego w niniejszej pracy, model Sieraka i in. (2013) miał charakter prognostyczny. Dochody bieżące (bez środków UE) były prognozowane w oparciu o wykonanie z 2011 r. powiększone o wzrost PKB i inflację. Z kolei dochody bieżące z UE dla poszczególnych samorządów prognozowano jako iloczyn łącznej kwoty tej kategorii oraz

wskaźnika średniego udziału danej JST w latach 2007-2011. Założono, że wydatki bieżące (bez odsetek i wydatków bieżących refundowanych ze środków UE ze współfinansowaniem) będą rosły podobnie jak dochody bieżące, w tempie PKB i inflacji, przy czym tempo PKB zostało skorygowane w dół o 10%. Wydatki bieżące refundowane ze środków UE ze współfinansowaniem obliczono jako iloczyn dochodów bieżących z UE i założonego wskaźnika współfinansowania. Przyjęto różne wskaźniki dla gmin, powiatów, województw oraz projektów „twardych” (inwestycyjnych) i „miękkich”. Przyjęto, że środki (dochody) z UE na inwestycje kształtują się w ten sam sposób, co dochody bieżące z UE. Wydatki inwestycyjne refundowane ze środków UE ze współfinansowaniem obliczono podobnie jak refundowane wydatki bieżące, tj. za pomocą iloczynu środków z UE na inwestycje ogółem oraz założonego wskaźnika współfinansowania. Pozostałe dochody majątkowe obliczano przy założeniu stałej relacji do dochodów bieżących poszczególnych JST, przy czym współczynnik tej relacji różnił się dla gmin, miast na prawach powiatu, powiatów i województw.

Model Sieraka i in., podobnie jak model w niniejszej pracy, uwzględnia także nadwyżkę operacyjną, przyrost długu (potrzebnego do zrównoważenia sumy wydatków i rozchodów), dług na początku roku budżetowego, spłatę długu oraz dopuszczalny i rzeczywisty wskaźnik obsługi zadłużenia. Odsetki zostały skalkulowane jako iloczyn stopy procentowej (półtorakrotności stopy inflacji powiększonej o 1 p.p.) i długu z roku poprzedniego. Dług jest spłacany zgodnie ze stałą roczną stopą umorzenia długu.

W kontekście zadłużenia polskich samorządów, warto też przytoczyć obserwacje poczynione przez Kamińskiego (2012). Stwierdził on, że system finansowania wydatków JST „został skonfrontowany w ostatnim dziesięcioleciu z dwoma istotnymi wyzwaniami”: 1) odejściem od zrównoważonego budżetu bieżącego na rzecz finansowania dłużnego wynikającego z chęci wykorzystania środków unijnych i 2) kryzysem finansowym, który miał wpłynąć na zmniejszenie się dochodów JST i w konsekwencji wydatków inwestycyjnych.

Inne godne uwagi badanie oparte na danych jednostkowych polskich samorządów stanowi praca Falkowskiego i Bukowskiej (2016). Porównano w nim gminy wiejskie, w których rządził ten sam wójt przez sześć kadencji z rządu (od wyborów w 1990 do 2010 r.) z pozostałymi gminami wiejskimi. Wysznuło wniosek, że monopolizacja władzy nie przekłada się na wyniki gospodarcze gmin, tj. poziom inwestycji na mieszkańca, stopę bezrobocia i wysokość nadwyżki operacyjnej. Istotny okazał się natomiast wpływ monopolizacji władzy na poziom frekwencji w wyborach samorządowych.

Pozostała literatura poświęcona polskim samorządom skupia się na ogół na aspektach prawnych (Skuza, 2003a i 2003b; Wiewióra, 2007), finansowych (Karpieński, 2001; Jastrzębska, 2002; Gonet, 2004) lub teoretycznych (Guziejewska 2007 i 2008).

Reasumując, polityka fiskalna zazwyczaj jest prezentowana z perspektywy podsektora centralnego. Niniejszy artykuł powinien zatem wypełnić lukę w literaturze naukowej, polegającą na braku badań opisujących polską jednostkę samorządową jako podmiot maksymalizujący swoją funkcję celu, mający możliwość decydowania o poziomach wybranych zmiennych oraz podlegający określonym warunkom ograniczającym.

2 Model decyzyjny władz samorządowych

Przedstawiony w niniejszym artykule model opisuje problem, przed którym stoją decydenci jednostki samorządu terytorialnego (wójt, burmistrz gminy lub prezydent miasta) w okresie, w którym istotną rolę w finansowaniu inwestycji odgrywają środki unijne¹. Jednostka samorządu

¹Model można jednak uogólnić na okres, w którym środki unijne przestaną być istotne.

terytorialnego jest w niniejszej pracy rozumiana jako gmina lub miasto na prawach powiatu, w tym Warszawa.

Województwa i powiaty ziemskie nie są więc brane pod uwagę. Wynika to z „silnego zróżnicowania potencjału finansowego pomiędzy rodzajami JST” (Sierak i in., 2013). Przykładowo, udział wydatków majątkowych w wydatkach ogółem jest wyraźnie mniejszy w powiatach ziemskich niż w gminach, natomiast odwrotna sytuacja ma miejsce w województwach. W niniejszej pracy wykorzystywane są dane empiryczne dotyczące gmin i miast na prawach powiatu, dlatego zdecydowano się zawęzić obszar badań do najniższego szczebla jednostek samorządowych. Należy zarazem podkreślić, że samorzady wojewódzkie i powiatowe ziemskie mają stosunkowo małe znaczenie - łącznie ich wydatki ogółem w każdym roku z okresu 2005-2014 były około cztery razy mniejsze niż łącznie wydatki gmin i miast powiatowych. W 2015 r. łączne wydatki samorządów województw i powiatów wyniosły 40,6 mld zł, natomiast gmin, miast na prawach powiatów (w tym Warszawy, która często bywa traktowana oddzielnie w statystykach) wyniosły 155,8 mld zł (RIO, 2015).

2.1 Preferencje

Problem decyzyjny samorządowców można zinterpretować następująco. Po wygranych wyborach, które odbywają się na koniec roku zerowego, nowe władze samorządowe mają przed sobą cztery lata kadencji. Decydenci owi zastanawiają się, ile środków przeznaczyć na wydatki bieżące i inwestycje w roku pierwszym, drugim, trzecim i czwartym.² W pierwszym dniu roku piątego odbywają się kolejne wybory, podczas których mieszkańcy danej gminy lub miasta oceniają dotychczasowe władze pod kątem strumienia wydatków bieżących z czterech ostatnich lat i zasobu infrastruktury na moment bieżący, a także w trzech zeszłych latach.

Mieszkańcy obszaru zarządzanego przez daną JST czerpią użyteczność z wydatków bieżących w roku t oznaczonych jako c_t (tj. przeznaczonych na bieżącą działalność, świadczenia społeczne, zasiłki i stypendia oraz inne podmioty, m.in. uczelnie, szkoły, przedszkola, instytucje kultury, zakłady opieki zdrowotnej, Izby Rolnicze i inne JST; w tej kategorii nie uwzględnia się natomiast odsetek od kredytów i pożyczek, gdyż zostały one zdefiniowane oddzielnie) oraz z zasobu szeroko rozumianej infrastruktury z roku $t + 1$, tj. k_{t+1} (m.in. dróg, szkół, przedszkoli, domów kultury, obiektów sportowych, oczyszczalni ścieków, pojazdów transportu zbiorowego). Maksymalizowana jest suma zdyskontowanych rocznych strumieni użyteczności z c_t i k_{t+1} wyrażonych za pomocą kombinacji liniowej logarytmów tych zmiennych.

Zakłada się tutaj tożsamość preferencji (z wyjątkiem horyzontu czasowego) władz i mieszkańców. Politycy starają się maksymalizować dokładnie znaną, logarytmiczną funkcję użyteczności mieszkańców po to, aby wygrać następne wybory.

Optymalizacji podlega więc następująca funkcja:

$$\max_{\{c_t\}, \{u_t\}, \{i_t\}, \{z_t\}} \sum_{t=1}^4 \beta^t (\alpha \ln c_t + (1 - \alpha) \ln k_{t+1}). \quad (1)$$

Założenie logarytmicznej, separowalnej względem c_t i k_{t+1} funkcji użyteczności jest zgodne z postulatem dodatniej, malejącej krańcowej użyteczności czerpanej z wydatków bieżących i infrastruktury. Spośród wielu funkcji o dodatniej pierwszej pochodnej i ujemnej drugiej pochodnej, wybrano logarytm ze względu na możliwość uzyskania prostych rachunków (pochodną logarytmu zmiennej jest odwrotność zmiennej, a separowalność sprawia, że pochodne mieszane

²W wyżej opisany sposób można zinterpretować problem optymalizacyjny z rozdziału 5.2. Nieco inaczej należy opisać problem z rozdziału 5.1. Władze samorządowe dokonują tam decyzji po zakończeniu drugiego roku - planują wydatki jedynie na rok trzeci i czwarty.

drugiego rzędu są równe zero). Co więcej, logarytmy są często używane przez ekonomistów w funkcjach użyteczności³.

Czasowy horyzont planowania został ograniczony z tradycyjnie przyjmowanej w ekonomii nieskończoności do czterech lat kadencji władz samorządowych z dwóch powodów.

Po pierwsze, zakłada się krótkowzroczność polityków - ich głównym celem jest zwycięstwo w kolejnych wyborach i dlatego zależy im na maksymalizacji użyteczności w ciągu bieżącej kadencji, a nie w długim okresie. W tym celu decydenci np. wolą zrealizować maksymalne wydatki dopuszczalne przez reguły fiskalne niż wziąć pod uwagę obciążenie długiem przyszłych pokoleń. Słabością przyjętego założenia jest abstrahowanie od możliwości reelekcji. Oznacza to, że wyborcy, mimo że zależy im na użyteczności w długim okresie, nie są w stanie dobrze prognozować wydatków w przyszłości, więc oceniają polityków wyłącznie przez pryzmat ostatniej kadencji. Ponadto odróżnienie funkcji celu wyborców od polityków oraz uwzględnienie niepełnej informacji, co zostało wspomniane w poprzednim rozdziale, należy do cech współczesnych teorii fiskalnego federalizmu.

Po drugie, model zawiera kilka warunków ograniczających oraz zmiennych decyzyjnych, przez co rozwiązania optymalne mają złożoną postać i różnią się w zależności od przyjętego wariantu stanów początkowych. Skrócenie horyzontu czasowego do jednej kadencji umożliwia stosunkowo czytelny zapis i analizę rozwiązań.⁴

Warto wyjaśnić także występowanie w funkcji użyteczności zmiennej k_{t+1} zamiast k_t . Przede wszystkim, gdyby użyto k_t , to optymalne inwestycje w ostatnim roku kadencji byłyby zerowe, gdyż zgodnie z równaniem (2) na poziom infrastruktury w przyszłym roku wpływają inwestycje z poprzedniego roku. W praktyce inwestycje samorządowe w ostatnim roku kadencji odgrywają istotną rolę w pozyskaniu głosów wyborców. Można nawet postawić hipotezę, że obywatele wynagradzają władze samorządowe bardziej za przyrost infrastruktury niż za jej poziom, który odziedziczyli po swoich poprzednikach. Jednak krańcowa użyteczność z infrastruktury - jak z każdego dobra - maleje, więc w funkcji użyteczności występuje poziom k_{t+1} , a nie zmiana.

2.2 Ograniczenia budżetowe

JST podlegają w każdym roku ograniczeniu budżetowemu (wg terminologii Kornaia - twar demu). Założono, że suma wydatków i rozchodów równa się sumie dochodów i przychodów z zaciągniętych pożyczek i wyemitowanych obligacji. Jednak, zgodnie z art. 217 ust. 2 pkt 5-6 ustawy o finansach publicznych, deficyt budżetu JST może być dodatkowo sfinansowany przychodami pochodzącymi m.in. z: nadwyżki budżetu JST z lat ubiegłych lub wolnych środków jako nadwyżki środków pieniężnych na rachunku bieżącym budżetu JST, wynikających z rozliczeń wyemitowanych papierów wartościowych, kredytów i pożyczek z lat ubiegłych.

Z dwóch powodów abstrahowano od nadwyżki zgromadzonej w latach ubiegłych. Po pierwsze, zakładając, że oprocentowanie długu jest większe niż depozytów, samorządom korzystniej byłoby zredukować wolne środki do zera oraz spłacić w tej samej kwocie dług. Po drugie, w rzeczywistości nadwyżka z lat ubiegłych stanowi średnio tylko 7% przychodów gmin i miast powiatowych. W 57% są to kredyty, pożyczki i wyemitowane papiery wartościowe, a w 33% - wolne środki wynikające z rozliczeń kredytów, pożyczek i wyemitowanych papierów wartościowych z lat ubiegłych. Ta ostatnia kategoria występuje, jeżeli samorzady zaciągną kredyt w jednym

³O logarytmicznie modelowanej użyteczności pisał już w XVIII wieku matematyk Bernoulli, jego praca została przedrukowana w *Econometrica* (1954). Założył on, że „jakikolwiek wzrost majątku (...) będzie zawsze skutkował wzrostem użyteczności odwrotnie proporcjonalnym do ilości dóbr już posiadanych”, a funkcją spełniającą powyższy warunek jest właśnie logarytm.

⁴Co więcej, dopiero potraktowanie dwóch pierwszych lat jako danych, czyli skrócenie horyzontu do roku trzeciego i czwartego umożliwia rozwiązanie analityczne modelu.

roku (np. w grudniu) w celu wydania tych środków w roku następnym (np. w styczniu). W modelu zaciąganie pożyczek zachodzi dokładnie raz na rok, a popyt zgłaszany przez samorządy jest całkowicie zaspokajany po z góry określonej stopie procentowej. Dlatego modelowym decydom nie opłacałoby się zadłużanie się z rocznym wyprzedzeniem. Wszystkie rozliczenia kredytów, pożyczek i papierów wartościowych odbywają się w roku bieżącym. W rezultacie, 90% przychodów JST jest odwzorowane w modelu bez nadwyżki z lat ubiegłych.

Założono dwa źródła dochodów: bieżące i kapitałowe unijne (dalej, w skrócie: unijne). Przyjęto, że dochody bieżące, y_t (dotacje i subwencje z budżetu państwa i środków unijnych, wpływy z podatków - PIT i CIT - opłaty i kary oraz dochody z majątku⁵) rosną w stałym tempie γ . W modelu szereg $y_t = y_0(1 + \gamma)^t$ jest więc góry ustalony, dlatego równanie na y nie zostało podane jako jedno z ograniczeń w dalszej części rozdziału. W rzeczywistości dostęp do środków unijnych jest ograniczony, zatem w modelu zakłada się, że dochody unijne w relacji do dochodów bieżących $\frac{u_t}{y_t}$ nie mogą przekroczyć limitu przeznaczonego dla danego JST - v :

$$0 \leq \frac{u_t}{y_t} \leq \frac{U_t}{y_t} = v.$$

Źródłem przychodu netto z_t jest zaciągnięta pożyczka albo kredyt w roku t lub też, zgodnie z inną interpretacją, wpływ z wyemitowanych obligacji. Zmienna z_t może przyjmować wartości ujemne, co należy interpretować jako spłatę netto części zadłużenia. Początkowy stan zadłużenia b_0 powiększony o skumulowane pożyczki z kolejnych lat stanowi zadłużenie w roku t :

$$b_{t+1} = b_0 + \sum_{\tau=0}^t z_{\tau}.$$

Wydatki mogą być przeznaczone na cztery cele. Z góry ustalone są odsetki od zadłużenia w wysokości iloczynu stałej stopy procentowej i długu rb_t . Decyzji podlega kwota przeznaczona na wydatki bieżące c_t (wszystkie oprócz odsetek i wydatków majątkowych), a także inwestycje zwykłe i_t oraz unijne $(1 + \theta)u_t$. Współczynnik $\theta > 0$ reprezentuje część finansowania inwestycji ze środków własnych JST (tzw. współfinansowanie).

Wydatki mogą być finansowane z dochodów bieżących, unijnych lub zaciągniętych pożyczek. Podsumowując, ograniczenie budżetowe JST przedstawia się następująco:

$$(1 + \theta)u_t + i_t + c_t + rb_t = u_t + y_t + z_t.$$

Inwestycje powodują przyrost infrastruktury k_t , która ulega corocznej deprecjacji o frakcję δ . Parametr ten obejmuje także wpływ inflacji, tj. opisuje zmianę nominalnej wartości infrastruktury wynikającą m.in. ze zmian cen. Warto zauważyć, że w pierwszej kolejności optymalną decyzją wydaje się realizowanie inwestycji unijnych, gdyż są one częściowo finansowane ze środków zewnętrznych⁶. Nie jest jednak wykluczone, że optymalny łączny poziom inwestycji powinien przekroczyć $(1 + \theta)u_t$ i wówczas jedynym wyjściem jest realizowanie również bardziej kosztownych inwestycji zwykłych:

$$k_t = k_{t-1}(1 - \delta) + (1 + \theta)u_{t-1} + i_{t-1}.$$

⁵Nie zdecydowano się na wprowadzenie równania objaśniającego dochody z majątku za pomocą infrastruktury k_t ze względu na możliwe nadmierne skomplikowanie modelu.

⁶W większości przypadków rzeczywiście tak powinno być, ale nie jest to pewne ze względu na występowanie dochodów unijnych w mianownikach indywidualnego wskaźnika zadłużenia (IWZ, szczegóły kilka akapitów niżej). Nie można wykluczyć, że w pewnych wyjątkowych sytuacjach korzystne mogłoby być zmniejszenie w danym roku (inne rozłożenie w czasie) inwestycji unijnych, a w konsekwencji: zmniejszenie dochodów unijnych, zmniejszenie mianownika IWZ i wreszcie - zwiększenie przestrzeni fiskalnej.

Zmiennymi decyzyjnymi w tym modelu są szeregi czasowe: wydatków bieżących, inwestycji unijnych i zwykłych, a także kwoty zaciągniętego długu. Wszystkie te zmienne, oprócz ostatniej, mogą przyjmować tylko wartości nieujemne:

$$\begin{aligned}c_t &\geq 0; \\u_t &\geq 0; \\i_t &\geq 0.\end{aligned}$$

2.3 Reguły fiskalne zapobiegające eksplozji długu

Tak wyspecyfikowany model nie miałby rozwiązania optymalnego. W ostatnim roku warto byłoby bowiem zaciągać jak największy (teoretycznie - nieskończenie wielki) dług z_4^* . Jego część (rz_4^*) przeznaczono by na odsetki, natomiast pozostała część ($(1-r)z_4^*$) zwiększałaby wydatki bieżące c_4 , które w sposób nieograniczony zwiększałyby użyteczność. Wprawdzie odsetki ponoszone z tytułu takiego długu stanowiłyby wielkie obciążenie budżetu w przyszłych latach, ale z uwagi na czteroletni horyzont planowania, użyteczność z tych lat nie byłaby w ogóle brana pod uwagę. W rzeczywistości politycy również stoją przed pokusą prowadzenia nadmiernie ekspansywnej polityki budżetowej. Warto tu ponownie przywołać ustalenia Besleya i Coate'a (2003) o zawiązaniu wydatków publicznych przez rządy uwzględniające interesy wszystkich regionów.

Dlatego samorzady podlegają regułom fiskalnym zapisanym w ustawie o finansach publicznych. Włączenie tych reguł do modelu sprawia, że eksplodujące zadłużenie przestaje być rozwiązaniem dopuszczalnym. Istnieją dwie reguły fiskalne nałożone na budżety samorządów zarówno *ex ante*, jak i *ex post*: reguła nadwyżki operacyjnej oraz indywidualny limit zadłużenia.

Pierwsza reguła nałożona na jednostki samorządu terytorialnego została zapisana w art. 242 ustawy o finansach publicznych. Głosi ona, że zarówno planowane, jak i wykonane wydatki bieżące nie mogą być wyższe niż dochody bieżące powiększone o nadwyżkę budżetową z lat ubiegłych i wolne środki. Artykuł jest interpretowany tak, że jeśli skumulowany wynik za ubiegłe lata był ujemny, to dochody bieżące nie są pomniejszane, a jeśli dodatnie, to są powiększane. Dokładne wytłumaczenie sposobu obliczenia tej kategorii podał Bitner (2014). W niniejszym modelu nadwyżka z lat ubiegłych nie jest modelowana, zatem opisywaną tu regułę można zapisać w następujący sposób:

$$c_t + rb_t \leq y_t.$$

Od 2014 r., zgodnie z art. 243 ustawy o finansach publicznych, samorzady obowiązują także przestrzeganie indywidualnych wskaźników zadłużenia, wyrażonych wzorem:

$$\frac{\chi'_t b_t + r_t b_t}{y_t + k'_t + u_t} \leq \frac{1}{3} \sum_{\tau=t-3}^{t-1} \frac{y_\tau + k'_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + k'_\tau + u_\tau},$$

gdzie: χ' - planowana na rok budżetowy łączna kwota z tytułu spłat rat kredytów i pożyczek⁷; k' - dochody ze sprzedaży majątku. W powyższej nierówności występują także zmienne, których definicje z niniejszego modelu są bardzo zbliżone do definicji ustawowych. W celu zachowania przejrzystości - pozostawiono ich oznaczenia bez zmian. Niemniej jednak należy zaznaczyć, że rb

⁷(...) oraz wykupów papierów wartościowych przeznaczonych na finansowanie planowanego deficytu budżetu, spłatę wcześniej zaciągniętych zobowiązań, wyprzedzające finansowanie działań finansowanych ze środków pochodzących z budżetu UE, a także na finansowanie przedsięwzięć inwestycyjnych.

w ustawie zdefiniowano jako planowane na rok budżetowy odsetki od kredytów i pożyczek⁸; $y + k' + u$ - dochody ogółem budżetu w danym roku budżetowym; y - dochody bieżące; c - wydatki bieżące.

W rozważanym tutaj modelu uwzględniono uproszczony wzór na limit zadłużenia, rezygnując ze zmiennej k' - dochodów ze sprzedaży majątku. Uznano bowiem, że sprzedaż majątku należy traktować jako działanie wyjątkowe - jednorazowe, zatem nie może stanowić stałego źródła finansowania wydatków. Ponadto możliwość sprzedaży majątku wymagałaby podziału tej zmiennej na poszczególne (niejednorodne) typy, gdyż w przeciwnym razie, zakładając inwestycje (czyli zwiększenie jednorodnego majątku) jednocześnie sprzedaż (zmniejszenie jednorodnego majątku) nie miałyby sensu. Co więcej, z danych JST wynika, że udział tej kategorii dochodów jest niski.

Uściślenia wymaga też kwestia dochodów. W statystyce samorządów, dochody ogółem składają się z dochodów bieżących: krajowych i unijnych (nazwanych tak dla uproszczenia, w prawie zostały one określone w art. 5 ust. 1 pkt 2 i 3 ustawy o finansach publicznych, w szczególności mogą pochodzić z Norweskiego Mechanizmu Finansowego lub Szwajcarsko-Polskiego Programu Współpracy) oraz majątkowych: ze sprzedaży majątku i pozostałych majątkowych - krajowych i unijnych. W modelu występuje tylko jedna kategoria dochodów unijnych - należy je traktować jako tylko majątkowe, gdyż w przeciwnym razie musiałyby wystąpić w liczniku nierówności (2). Wobec tego, dochody bieżące modelowanej gminy, y_t , zawierają w sobie kształtowane egzogenicznie dochody bieżące: krajowe i unijne. W modelu nie występują też pozostałe dochody majątkowe, które mają dość niski udział w dochodach ogółem, oraz dochody ze sprzedaży majątku, co zostało wyjaśnione w poprzednim akapicie. Jedyne zatem dochody majątkowe to u_t .

Ponadto, zastąpiono spłatę rat kredytów z' stałym odsetkiem zadłużenia, które zapada w danym roku $\chi \cdot b_t$. Należy zaznaczyć, że modelowany jest przyrost netto wartości zadłużenia (podobnie jak majątku), a nie poszczególne transakcje. Stała jest również stopa procentowa r . Poniższa nierówność uniemożliwia nieograniczone zaciąganie długu w ostatnim roku:

$$\frac{(\chi + r)b_t}{y_t + u_t} \leq \frac{1}{3} \sum_{\tau=t-3}^{t-1} \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau}. \quad (2)$$

3 Rozwiązanie modelu

3.1 Zapis rozwiązania modelu za pomocą warunków Karusha-Kuhna-Tuckera

Warunki konieczne, które musi spełniać rozwiązanie optymalne modelu, wynikają z twierdzenia Karusha, Kuhna i Tuckera (KKT), które brzmi następująco (Chong, Żak, 2001, s. 397-398):

Rozważmy problem optymalizacyjny:

$$\min f(\mathbf{x})$$

p.w.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0},$$

⁸(...) zaciągniętych na pokrycie występującego w ciągu roku przejściowego deficytu budżetu, finansowanie planowanego deficytu budżetu, spłatę wcześniej zaciągniętych zobowiązań, wyprzedzające finansowanie działań finansowanych ze środków pochodzących z budżetu UE oraz na finansowanie przedsięwzięć inwestycyjnych, a także odsetki i dyskonto od papierów wartościowych emitowanych na te cele oraz spłaty kwot wynikających z udzielonych poręczeń i gwarancji.

gdzie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ i $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Niech: $J(\mathbf{x}^*) = \{j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$. Niech \mathbf{x}^* będzie punktem regularnym, tzn. takim, że wektory:

$$\nabla h_i(\mathbf{x}^*), \nabla g_j(\mathbf{x}^*), 1 \leq i \leq m, j \in J(\mathbf{x}^*)$$

są liniowo niezależne. C^1 oznacza zbiór funkcji ciągłych i różniczkowalnych w sposób ciągły⁹.

Niech $f, \mathbf{h}, \mathbf{g} \in C^1$. Niech \mathbf{x}^* będzie punktem regularnym, stanowiącym ekstremum lokalne f , pod warunkiem że $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$. Wtedy istnieje $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$ (tzw. wektor mnożników Lagrange'a) i $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^p$ (tzw. wektor mnożników KKT), takie że:

1. $\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$;
2. $Df(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\mu}^{*T} D\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$;
3. $\boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$.

Dowód można znaleźć np. we wspomnianym podręczniku do optymalizacji autorstwa Chonga i Żaka (2001, s. 399-401).

Model decyzyjny władz samorządowych z warunkami w postaci KKT należy zapisać w następujący sposób:

$$\max_{\{c_t\}, \{u_t\}, \{i_t\}, \{z_t\}} f(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^4 \beta^t (\alpha \ln c_t + (1 - \alpha) \ln k_{t+1}) \quad (3)$$

p.w. $\forall t \in 1, 2, 3, 4$

$$h_{1t}(\mathbf{x}) : \theta u_t + i_t + c_t + r b_t - y_t - z_t = 0$$

$$h_{2t}(\mathbf{x}) : b_{t+1} - b_1 - \sum_{\tau=1}^t z_\tau = 0$$

$$h_{3t}(\mathbf{x}) : k_{t+1} - (1 - \delta)k_t - i_t - (1 + \theta)u_t = 0$$

$$g_{1t}(\mathbf{x}) : -u_t \leq 0$$

$$g_{2t}(\mathbf{x}) : u_t - U_t \leq 0$$

$$g_{3t}(\mathbf{x}) : -c_t \leq 0$$

$$g_{4t}(\mathbf{x}) : -i_t \leq 0$$

$$g_{5t}(\mathbf{x}) : \frac{(\chi + r)b_{t+1}}{y_{t+1} + u_{t+1}} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=t-2}^t \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} \leq 0 \quad (4)$$

$$g_{6t}(\mathbf{x}) : c_t + r b_t - y_t \leq 0 \quad (5)$$

dane: $b_{-1}, b_0, b_1, k_1, c_{-1}, c_0, u_{-1}, u_0, u_5$.

Rozwiązanie modelu polega na znalezieniu wartości składowych wektora:

$$\mathbf{x}^* = [c_1^* \ c_2^* \ c_3^* \ c_4^* \ u_1^* \ u_2^* \ u_3^* \ u_4^* \ i_1^* \ i_2^* \ i_3^* \ i_4^* \ z_1^* \ z_2^* \ z_3^* \ z_4^*]^T,$$

spełniających warunki z twierdzenia KKT. Wymaga to policzenia pochodnych funkcji $f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu} \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Jednocześnie, w przypadku każdego warunku g_j : jeżeli $g_j(x) < 0$, to $\mu_j = 0$ i analogicznie: jeżeli $\mu_j > 0$, to $g_j(x) = 0$. Wynika to z faktu, że oba czynniki $g_j(x)$ i μ_j nie mogą być jednocześnie niezerowe, gdyż taki iloczyn mógłby być tylko ujemny (co wynika z pierwszego warunku KKT i tego, że $g_j \leq 0$), a wówczas suma ujemnych i ewentualnie zerowych iloczynów dałaby liczbę ujemną, a nie zerową, co wymaga trzeciego warunku KKT.

⁹Założenia twierdzenia KKT można nieco osłabić, ale dla funkcji wykorzystanych w niniejszym modelu nie ma to znaczenia (Palczewski, 2014, s. 57-58)

Warunki Kuhna-Tuckera są warunkami koniecznymi tylko wtedy, gdy spełnione są warunki tzw. kwalifikowalności¹⁰. Mogą istnieć bowiem rozwiązania optymalne, które nie spełniają warunków KKT, ale musiałyby one znajdować się w specyficznym określonych punktach brzegowych. W przykładzie z podrozdziału 3.3 pokazano, że rozwiązanie analityczne modelu może sprowadzać się do znalezienia, przy ustalonej strukturze warunków ograniczających, optymalnego poziomu inwestycji zwykłych (i_t^*). O poziomie tym założono w omawianym przykładzie, że nie jest zerowy, a zatem z góry przyjęto, że nie może znaleźć się w punkcie brzegowym.

Teoretycznie ekstremów lokalnych spełniających warunki KKT mogłoby być więcej niż jeden i wówczas należałoby wybrać spośród nich ekstremum (ewentualnie ekstrema) globalne. Jednak „żaden punkt wewnętrzny zbioru rozwiązań dopuszczalnych, nie spełniający warunków KKT, nie może być rozwiązaniem optymalnym” (Chiang, 1994). Oznacza to, że jeżeli ekstremum globalne istnieje w punkcie wewnętrznym oraz jeżeli zbiór punktów spełniających warunki KKT jest jednoelementowy, to punkt należący do tego zbioru jest ekstremum globalnym. W dalszej części pracy (w szczególności w poroździale 3.3 oraz części B i C aneksu) pokazano, że punkty spełniające warunki KKT dla pewnego podzbioru zbioru rozwiązań dopuszczalnych stanowią rozwiązanie równania sześciennego. Spośród trzech takich rozwiązań, dwa stanowią liczby zespolone, a tylko jeden należy do zbioru liczb rzeczywistych. Oznacza to, że punkt ten musi być globalnym rozwiązaniem optymalnym w ramach omawianego podzbioru.

Wyznaczenie pełnego rozwiązania analitycznego takiego modelu jest niewykonalne ze względu na ogromną złożoność zagadnienia. Już nawet rozwiązanie dla trzeciego i czwartego roku (patrz podrozdział 3.3) wymaga bardzo żmudnych i czasochłonnych rachunków, które prowadzą do równania sześciennego. Dlatego w kolejnych podrozdziałach zostaną wyznaczone, metodą analityczną, fragmentaryczne rozwiązania modelu, dla $t = 3, 4$ (dla z góry ustalonych wartości zmiennych decyzyjnych z lat $t = 1, 2$), a następnie, metodą numeryczną, pełne rozwiązanie modelu, dla $t = 1, 2, 3, 4$. Innymi słowy, w kolejnych podrozdziałach przedstawione zostaną rozwiązania analityczne problemu (3) na pewnych podzbiórach pełnego zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Rozwiązania takie co do zasady nie będą stanowiły globalnego maksimum problemu (3), jednak pozwolą zbudować cenną intuicję odnośnie do funkcjonowania modelu. Pełne rozwiązanie modelu zostanie wyznaczone metodą numeryczną w rozdziale 5, po kalibracji modelu w rozdziale 4. Jak się okaże, struktura warunków ograniczających w rozwiązaniu optymalnym z dużym prawdopodobieństwem będzie zgodna z tą, którą założono na potrzeby rozwiązania analitycznego w rozdziale 3. Pozwala to potwierdzić praktyczną użyteczność przedstawionych tu analiz.

3.2 Analityczne rozwiązanie dla czwartego roku z napiętym warunkiem IWZ

Uprościmy teraz problem, znajdując „na skróty” optymalne wartości dla zmiennych z roku czwartego. W tym celu warunek $h_{14}(\mathbf{x})$ należy przekształcić do postaci:

$$\theta u_4 + i_4 + c_4 = z_4 + y_4 - rb_4.$$

Zmienne y_4, b_4 są z góry ustalone w roku czwartym. Widać zatem, że suma wydatków bieżących i inwestycyjnych zależy dodatnio od wielkości zaciągniętego długu w czwartym roku. Optymalnie byłoby zatem powiększyć dług jak najbardziej to możliwe, czyli na tyle, na ile pozwalają reguły fiskalne. Z analizy rozwiązań optymalnych uzyskanych za pomocą metod numerycznych (rozdz. 3.4) wynika, że prawie zawsze napięty jest warunek indywidualnego wskaźnika zadłużenia (IWZ,

¹⁰Szczegółową dyskusję na ten temat można znaleźć np. w podręczniku do ekonomii matematycznej Chianga (1994).

patrz równanie (4)), a bardzo rzadko - zrównoważonego wyniku bieżącego (ZWB, patrz równanie (5)). Dlatego dalej założono, że IWZ jest warunkiem napiętym, a ZWB - luźnym.

Z napiętego warunku IWZ można wyprowadzić wzór na optymalny deficyt w roku czwartym:

$$\begin{aligned} \frac{(\chi + r)b_5^*}{y_5 + u_5^*} &= \frac{1}{3} \sum_{\tau=2}^4 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} \Rightarrow \\ \Rightarrow z_4^* &= \frac{y_5 + u_5^*}{\chi + r} \left(\frac{1}{3} \sum_{\tau=2}^4 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} \right) - b_4. \end{aligned}$$

Następnie można przekształcić ograniczenie budżetowe tak, aby po lewej stronie występowały tylko zmienne decyzyjne (ponieważ powinny przyjąć optymalne wartości, to zostały oznaczone gwiazdkami), a po prawej stronie - zmienne z góry ustalone w roku czwartym (ich suma to $\phi = \text{const}|_{t=4}$). Wyjątek stanowi zmienna $u_5 \leq U_5$, której wartość jest określana dopiero przez następną władzę samorządową, co wykracza poza omawiane tu zagadnienie optymalizacyjne. Na potrzeby rozwiązania można założyć, że w roku piątym kwota inwestycji unijnych opiewa na maksymalny limit, tj. $u_5^* = U_5$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta u_4^* + i_4^* + c_4^* + rb_4 = z_4^* + y_4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta u_4^* + i_4^* + c_4^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4^*} = \phi \end{aligned} \quad (6)$$

Czynnik dyskontujący β^4 można w funkcji celu pominąć, gdyż w tym rozdziale brany pod uwagę jest tylko jeden rok. Model optymalizacyjny można zapisać zatem w następujący sposób:

$$\max_{c_4, u_4, i_4} (\alpha \ln c_4 + (1 - \alpha) \ln k_5)$$

p.w.

$$\begin{aligned} \theta u_4 + i_4 + c_4 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4} - \phi &= 0 \\ -c_4 &\leq 0 \\ -i_4 &\leq 0 \\ -u_4 &\leq 0 \\ u_4 - U_4 &\leq 0 \\ c_4 + rb_4 &= y_4. \end{aligned}$$

Funkcja Lagrange'a i warunki konieczne (pierwszego rzędu) przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_4, u_4, i_4) &= \alpha \ln c_4 + (1 - \alpha) \ln ((1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)u_4 + i_4) + \\ + \lambda \left[\theta u_4 + i_4 + c_4 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4} - \phi \right] \\ &\quad - \mu_1 c_4 - \mu_2 i_4 - \mu_3 u_4 + \mu_4 (u_4 - U_4) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_4} = \frac{\alpha}{c_4} + \lambda \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4} \right) - \mu_1^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_4} = \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)u_4^* + i_4^*} + \lambda^* - \mu_2^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = \frac{(1-\alpha)(1+\theta)}{(1-\delta)k_4 + (1+\theta)u_4^* + i_4^*} + \lambda^* \left(\theta + (y_4 - rb_4 - c_4^*) \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{(y_4 + u_4^*)^2} \right) - \mu_3^* + \mu_4^* = 0.$$

Teoretycznie należałoby rozważyć szesnaście (2^4) zestawów potencjalnych rozwiązań optymalnych, gdyż każdy z czterech parametrów μ_i może przyjąć wartość zerową lub dodatnią. Poniżej przeanalizowano jednak tylko cztery wybrane warianty. Przede wszystkim założono, że $c_4^* > 0$, co implikuje $\mu_1 = 0$, a jednocześnie pozwala uniknąć rozpatrywania ośmiu wariantów. Trudno bowiem wyobrazić sobie samorząd, nawet o bardzo złym stanie infrastruktury, w którym nie poniesiono by żadnych wydatków bieżących. Zrezygnowano także z dwóch nierealistycznych scenariuszy: zerowych inwestycji zwykłych i unijnych dokładnie równych limitowi oraz dodatnich inwestycji zwykłych i zerowych unijnych, a także dwóch sprzecznych scenariuszy, które zakładałyby zerowe i zarazem równe limitowi inwestycje unijne (przy zerowych lub dodatnich inwestycjach zwykłych). Poniżej wyróżniono zatem cztery rodzaje rozwiązań, z których ostatnie zasługuje na szczególną uwagę.

Zbieżność poniższych rozwiązań, uzyskanych metodą analityczną, z rozwiązaniami otrzymanymi dzięki numerycznym metodom optymalizacyjnym, zaprezentowano szczegółowo w aneksie A. Wyjątek stanowi wariant trzeci, który nie został uwzględniony w aneksie (jest mało realny), lecz metoda postępowania w jego przypadku byłaby analogiczna do wariantu drugiego.

Wariant I

Jeżeli wartość $(1-\delta)k_4$ jest odpowiednio wysoka, to największą użyteczność przynosi przeznaczenie całych dostępnych funduszy na wydatki bieżące. Warunek (7) oznacza, że krańcowa użyteczność z wydatków bieżących sfinansowanych z całego dostępnego budżetu jest wyższa niż z dowolnie małego powiększenia infrastruktury:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c_4} &> \frac{\partial f}{\partial k_5} \text{ dla } k_5 = (1-\delta)k_4 & (7) \\ \frac{\alpha \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4} \right)}{\phi + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r}} &> \frac{1-\alpha}{(1-\delta)k_4}. \\ u_4^* &= 0 \\ i_4^* &= 0 \\ c_4^* &= \frac{\phi + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{y_4 - rb_4}{y_4}}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4}}. & (8) \end{aligned}$$

Wariant II

Jeżeli wartość $(1-\delta)k_4$ jest niższa, tzn. gdy warunek (7) nie zachodzi, to optymalnie jest przeznaczyć pewną część budżetu na inwestycje. Poniżej zakłada się, że optymalne inwestycje unijne nie przekroczą maksymalnej kwoty U_4 . W pierwszej kolejności zazwyczaj (przeciwny przypadek został omówiony w dalszej części pracy) powinny być realizowane inwestycje unijne, gdyż są tańsze. Jeśli więc ich wysokość nie przekracza ustalonej granicy, wówczas realizacja jakichkolwiek inwestycji ze środków własnych może nie mieć uzasadnienia.

$$\begin{aligned} U_4 &> u_4^* > 0 \\ i_4^* &= 0 \\ c_4^* &> 0 \\ \mu_2^* &> 0 \\ \mu_3^* &= 0 \\ \mu_4^* &= 0. \end{aligned}$$

Wartości trzech niewiadomych: u_4^* , c_4^* i λ^* można otrzymać, rozwiązując układ trzech równań złożonych z niżej zapisanych warunków I rzędu oraz ograniczenia budżetowego (6). Warto nadmienić, iż μ_2^* nie znajduje się w tych równaniach, ponieważ parametr ten pełni rolę pomocniczą - może on zostać obliczony z warunku I rzędu dla i_4^* .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_4} = \frac{\alpha}{c_4^*} + \lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = \frac{(1 - \alpha)(1 + \theta)}{(1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)u_4^*} + \lambda^* \left(\theta + (y_4 - rb_4 - c_4^*) \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{(y_4 + u_4^*)^2} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\theta u_4^* + c_4^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4^*} = \phi. \quad (11)$$

Próba analitycznego rozwiązania powyższego układu równań prowadzi do na tyle skomplikowanych rachunków, że nie zostały przedstawione. Co więcej, należy uznać całkowity brak inwestycji własnych samorządu za mało prawdopodobną sytuację. Niemniej jednak, optymalne rozwiązanie można uzyskać za pomocą numerycznych metod optymalizacji, o ile otrzymane rozwiązanie spełnia powyższe równania.

Wariant III

Jednocześnie mogą być wykonywane inwestycje własne oraz unijne w wysokości poniżej limitu. Wynika to z faktu, iż wysoki poziom inwestycji unijnych może utrudnić spełnianie reguły IWZ w czwartym roku. Spowodowałyby bowiem wzrost dochodów JST, przez co w niektórych przypadkach mogłyby zmniejszyć przestrzeń na odsetki i spłatę rat zadłużenia. Dlatego, wbrew intuicji, inwestowanie ze środków własnych czasami może być optymalne mimo możliwości tańszego finansowania unijnego. Podobnie jak w wariacie drugim, także w tym przypadku podanie optymalnego rozwiązania w postaci analitycznej było niemożliwe z uwagi na stopień złożoności rachunków.

$$\begin{aligned} U_4 &> u_4^* > 0 \\ i_4^* &> 0 \\ c_4^* &> 0 \\ \mu_2^* &= 0 \\ \mu_3^* &= 0 \\ \mu_4^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_4} &= \frac{\alpha}{c_4^*} + \lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_4} &= \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)u_4^* + i_4^*} + \lambda^* = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} &= \frac{(1 - \alpha)(1 + \theta)}{(1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)u_4^* + i_4^*} + \lambda^* \left(\theta + (y_4 - rb_4 - c_4^*) \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{(y_4 + u_4^*)^2} \right) = 0 \\ \theta u_4^* + i_4^* + c_4^* &\left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4^*} = \phi. \end{aligned}$$

Wariant IV

Jeżeli wartość $(1 - \delta)k_4$ jest odpowiednio niska, może opłacać się zrealizować inwestycje unijne na możliwie największą skalę, a dodatkowo zrealizować inwestycje zwykłe. Jest to najbardziej prawdopodobny wariant:

$$\begin{aligned} u_4^* &= U_4 \\ i_4^* &> 0 \\ c_4^* &> 0 \\ \mu_2^* &= 0 \\ \mu_3^* &= 0 \\ \mu_4^* &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_4} &= \frac{\alpha}{c_4^*} + \lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4} \right) = 0 \Rightarrow c_4 = - \frac{\alpha}{\lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4} \right)} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_4} &= \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)U_4 + i_4^*} + \lambda^* = 0 \Rightarrow i_4^* = - \frac{1 - \alpha}{\lambda^*} - (1 - \delta)k_4 - (1 + \theta)U_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\theta U_4 - \frac{1 - \alpha}{\lambda^*} - (1 - \delta)k_4 - (1 + \theta)U_4 - \\ &- \frac{\alpha}{\lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4} \right)} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} = \phi \\ &\theta U_4 - \frac{1 - \alpha}{\lambda^*} - (1 - \delta)k_4 - (1 + \theta)U_4 - \frac{\alpha}{\lambda^*} - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} = \phi \\ &-U_4 - \frac{1}{\lambda^*} - (1 - \delta)k_4 - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} = \phi \\ &\lambda^* = - \frac{1}{\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} + u_4^* + (1 - \delta)k_4} \end{aligned}$$

$$c_4^* = \frac{\alpha \left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} + (1 - \delta)k_4 + U_4 \right)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4}} \quad (12)$$

$$i_4^* = (1 - \alpha) \left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - \alpha(1 - \delta)k_4 - (\theta + \alpha)U_4. \quad (13)$$

Optymalny poziom wydatków bieżących zależy dodatnio od: parametru α opisującego preferencje samorządów w odniesieniu do c , stałej ϕ_0 oraz dochodów y_4 , które wyznaczają przestrzeń fiskalną, infrastruktury k_4 (im większa, tym mniej potrzebne są inwestycje) oraz limitu U_4 (im większy, tym wystarczy realizować mniej inwestycji zwykłych). Z kolei optymalny poziom inwestycji zwykłych również zależy dodatnio od ϕ_0 i y_4 , a ujemnie od: α , k_4 , U_4 , a także θ .

3.3 Analityczne rozwiązanie dla trzeciego roku z napiętym warunkiem IWZ

Po znalezieniu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych z roku czwartego, można przejść do poszukiwania rozwiązań dla roku trzeciego. W tym celu problem decyzyjny został najpierw

przeformułowany w warunkach roku trzeciego, a następnie rozwiązany za pomocą warunków KKT. Funkcja celu tego problemu ma następującą postać:

$$\max_{c_3, u_3, i_3, z_3} f(\mathbf{x}_3) = \beta^3 (\alpha \ln c_3 + (1 - \alpha) \ln k_4) + \beta^4 (\alpha \ln c_4^* + (1 - \alpha) \ln k_5^*).$$

Zakłada się, że w czwartym roku realizowany jest wariant czwarty z podrozdziału 3.2, t.j. z inwestycjami unijnymi na maksymalnym poziomie. Wariant ten wydaje się być najbardziej realistyczny, gdyż z symulacji opisanych w podrozdziale 4.2 wynika, że w zdecydowanej większości przypadków taki wariant jest optymalny. Ponadto, można domniemywać, że inwestycje w czwartym roku mogą być wyjątkowo wysokie z uwagi na ignorowanie przez decydentów przyszłego zadłużenia oraz IWZ dotyczących przyszłych lat. Wartość funkcji można dla uproszczenia podzielić przez β^3 :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_3) &= \alpha \ln c_3 + (1 - \alpha) \ln((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)u_3 + i_3) + \\ &+ \beta \alpha \ln \left(\frac{\alpha \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)b_4 + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)u_3 + i_3) + U_4 \right)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4}} \right) + \\ &+ \beta(1 - \alpha) \ln((1 - \alpha)(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)u_3 + i_3) + (1 + \theta)U_4 + \\ &+ (1 - \alpha) \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)b_4 + y_4 \right) - (\theta + \alpha)U_4 \end{aligned}$$

p.w.

$$h_{13}(\mathbf{x}_3) : \theta u_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3 - z_3 = 0 \quad (14)$$

$$h_{23}(\mathbf{x}_3) : b_4 - b_3 - z_3 = 0 \quad (15)$$

$$g_{13}(\mathbf{x}_3) : -u_3 \leq 0$$

$$g_{23}(\mathbf{x}_3) : u_3 - U_3 \leq 0$$

$$g_{33}(\mathbf{x}_3) : -c_3 \leq 0$$

$$g_{43}(\mathbf{x}_3) : -i_3 \leq 0$$

$$g_{53}(\mathbf{x}_3) : \frac{(\chi + r)b_4}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - rb_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + u_3} \right) \leq 0 \quad (16)$$

$$g_{63}(\mathbf{x}_3) : c_3 + rb_3 - y_3 \leq 0. \quad (17)$$

Powyższy problem można uprościć poprzez wyeliminowanie zmiennych b_4 i z_3 , których wartości mogą zostać obliczone rezydualnie, po znalezieniu optymalnych wartości pozostałych zmiennych decyzyjnych u_3 , i_3 i c_3 :

$$z_3 = \theta u_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3, \quad (18)$$

$$b_4 = b_3 + \theta u_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3. \quad (19)$$

Dzięki powyższym przekształceniom, problem ogranicza się do trzech zmiennych decyzyjnych: u_3 , i_3 i c_3 . Wyeliminowane zostają też warunki ograniczające (14) i (15), które zostaną wykorzystane dopiero w celu obliczenia b_4 i z_3 . Modyfikacji ulegnie także warunek (16):

$$g_{53}(\mathbf{x}) : \frac{(\chi + r)(b_3 + \theta u_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - rb_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + u_3} \right) \leq 0.$$

Wydatki bieżące wynikają z napiętego warunku IWZ.

Poniżej założono także, że warunek (16) jest bardziej rygorystyczny od warunku (17). Z analizy zaprezentowanej w podrozdziale 4.2 wynika, że warunek IWZ jest napięty prawie zawsze, a reguła zrównoważonego wyniku bieżącego - rzadko. Co więcej, JST występują przeciwko regule IWZ¹¹, a nie zrównoważonego wyniku bieżącego, z czego można wnioskować, że mają większe problemy z wypełnieniem IWZ. W związku z tym założono, że w rozwiązaniu optymalnym $c_3 + rb_3 < y_3$.

Dodatkowo można założyć, że $c_3 > 0$, ponieważ dla $c_3 = 0$ użyteczność z krańcowego przyrostu wydatków bieżących byłaby nieskończenie wielka. Podobnie, jak w roku czwartym, dla roku trzeciego można także założyć maksymalne możliwe finansowanie inwestycji ze środków unijnych (patrz podrozdział 4.1). W związku z tym mnożniki KKT $\mu_{13} = 0$, $\mu_{33} = 0$, natomiast $u_3 = U_3$, zatem u_3 przestaje być zmienną decyzyjną. Pozostają zatem niewiadome wartości dwóch zmiennych decyzyjnych: c_3 oraz i_3 , a także jednego mnożnika KKT: μ_{53} . Tym trzem niewiadomym odpowiadają trzy równania. Dwa równania stanowią warunki pierwszego rzędu, a jedno - związane jest ze spełnieniem reguły IWZ z równością.

W następstwie poczynienia powyższych założeń utworzono funkcję Lagrange'a w postaci:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^5 \mu_{j3} g_{j3}(\mathbf{x}) = \\ &= \alpha \ln c_3 + (1 - \alpha) \ln((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + \\ &+ \beta \alpha \ln \left(\frac{\alpha \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + rb_3 - y_3) \right)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4}} \right) + \\ &+ \frac{\alpha(y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4}} + \\ &+ \beta(1 - \alpha) \ln((1 - \alpha)(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + (1 - \alpha)U_4 + \\ &+ (1 - \alpha) \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \right) \\ &- (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3) + y_4) + \\ &+ \mu_{53} \left(\frac{(\chi + r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - rb_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \right). \end{aligned}$$

Następnie wyprowadzono dwa warunki pierwszego rzędu, czyli obliczono pochodne funkcji Lagrange'a po c_3 i i_3 oraz przyrównano je do zera. Połączenie dwóch równań w jedno umożliwiło wyeliminowanie mnożnika μ_{53} o nieznannej wartości. Po pewnych przekształceniach wykorzystano równanie na napięty warunek IWZ. Dzięki niemu można było wyznaczyć c_3 jako funkcję i_3 . Ostatecznie zatem w rachunkach pozostanie jedna zmienna decyzyjna - i_3 i jedno (skomplikowane) równanie. W celu łatwiejszego wykonania obliczeń, zastąpiono długie i złożone wyrazy (niezależne od zmiennej decyzyjnej i_3) w poszczególnych ułamkach tego równania, pojedynczymi symbolami pomocniczymi i uzyskano w ten sposób proste równanie. Dalsze przekształcenia prostego równania doprowadziły do uzyskania równania sześciennego. Istnieją trzy możliwe rozwiązania równania sześciennego w dziedzinie liczb zespolonych. Szczegółowe obliczenia zaprezentowano w części B aneksu.

Ze wszystkich symulacji wynika, że spośród trzech wyżej wymienionych rozwiązań równania sześciennego, tylko jedno (26) należy do zbioru liczb rzeczywistych. Pozostałe należą do zbioru liczb

¹¹ „Wprowadzony w 2014 r. indywidualny wskaźnik zadłużenia samorządów wymaga zmiany lub wręcz likwidacji, bo dusi inwestycje i nie pozwoli wykorzystać środków unijnych - przekonywali uczestnicy piątkowej debaty zorganizowanej przez Serwis Samorządowy PAP.” (PAP, 2015) „Samorządowcy wskazują, że gorset, który wskaźnik nakłada na JST, jest zbyt ciasny.” (Portal Samorządowy, 2016)

zespolonych i nie mają interpretacji ekonomicznej. Poprawność wyniku została zweryfikowana dzięki zgodności rozwiązania numerycznego z rozwiązaniem (26) wyprowadzonym analitycznie. Numeryczny algorytm optymalizacyjny startujący z arbitralnych (dowolnych) wartości zmiennych wielokrotnie odnajdywał bowiem te same rozwiązania optymalne, co wynikające ze wzoru (26). Z drugiej strony, algorytmy numeryczne mogą znajdować ekstrema lokalne, a nie globalne. Jeśli jednak rozwiązanie analityczne jest takie samo, to dowodzi to globalności danego ekstremum (przy założeniu danej struktury warunków ograniczających). Porównanie wyników osiągniętych za pomocą metody analitycznej i numerycznej znajduje się w części B aneksu.

3.4 Numeryczna metoda rozwiązania modelu

Analityczna metoda rozwiązania modelu, zaprezentowana w podrozdziałach 3.2 - 3.3 gwarantuje uzyskanie optymalnego wyniku jedynie w pewnym podzbiorze zbioru rozwiązań dopuszczalnych, który cechuje z góry ustalona struktura warunków ograniczających (czyli określony ex ante podział na warunki luźne i napięte). Metoda numeryczna, opisana w niniejszym podrozdziale, jest komplementarna względem analitycznej. Po pierwsze, wykonana tylko dla trzeciego i czwartego roku, pozwala sprawdzić, czy rozwiązując model bez zakładania struktury warunków ograniczających, rozwiązanie wskazywane jako optymalne jest takie samo, co w rozwiązaniu analitycznym. Wprawdzie taka kontrolna weryfikacja nie zapewnia całkowitej pewności, ale jednak gwarantuje bardzo wysokie prawdopodobieństwo otrzymania optymalnego rezultatu. Po drugie, metoda numeryczna umożliwia, w przeciwieństwie do analitycznej, znalezienie rozwiązania dla całej czteroletniej kadencji władz samorządowych.

Wiarygodność zaproponowanej tu numerycznej metody wynika z tego, że stanowi ona meta-algorytm wykorzystujący jednocześnie dwanaście metod optymalizacji zawartych w pakiecie *optimx* (Nash i Varadhan, 2011 i Nash, 2014) systemu R. W pierwszym kroku tego meta-algorytmu, wykonywane są niezależnie, przy założeniu losowych wartości startowych, algorytmy dwunastu numerycznych metod optymalizacji. Każdy z tych dwunastu algorytmów składa się z od kilku do nawet kilkuset kroków, w zależności od tego, jak szybko uzyskiwana jest zbieżność. Część z tych metod w ogóle nie znajduje dopuszczalnego rozwiązania, ale zazwyczaj przynajmniej jedna z nich jest w stanie uzyskać pewne rozwiązanie. Jednak taki wynik jest przeważnie tylko ekstremum lokalnym. Numeryczne metody optymalizacji są bowiem wrażliwe na wartości startowe i jeżeli algorytm rozpocznie swoje działanie na obszarze odległym od optimum globalnego, to możliwe jest jego „utknięcie” w punkcie stanowiącym ekstremum lokalne. Co więcej, w podsumowaniu pierwszego kroku meta-algorytmu, różne metody wskazują często na różne rozwiązania optymalne, o różnych wartościach funkcji celu, a przecież tylko co najwyżej jedno z nich, tj. generujące najwyższą użyteczność, może być ekstremum globalnym. Dlatego w drugim kroku meta-algorytmu, ponownie wykonuje się dwanaście algorytmów, tym razem z wartością startową będącą rozwiązaniem o najwyższej użyteczności spośród uzyskanych w kroku pierwszym. Kolejne iteracje są wykonywane, dopóki wartość najlepszego rozwiązania, z dwunastu wskazywanych jako optymalne, nie stabilizuje się.

Dwanaście stosowanych w meta-algorytmie numerycznych metod optymalizacji można podzielić na: niewykorzystujące pochodnych (*nelder-mead*, *newuoa*, *bobyqa*, *nmkb*, *hjkb*), newtonowskie (*nlm*, *nlmminb*), quasi-newtonowskie (*BFGS*, *L-BFGS-B*, *ucminf*) i gradientowe (*CG*, *spg*). Należy zaznaczyć, że terminologia ta pochodzi z opracowania Nasha i Varadhana (2011, s. 5) i nie jest całkowicie precyzyjna. Wynika to z faktu, że zazwyczaj algorytm optymalizacyjny można uruchomić z podaniem w roli argumentu funkcji gradientu i/lub hesjanu albo bez podawania tych funkcji. W zależności od tego konieczna będzie aproksymacja gradientu i/lub hesjanu lub też nie będzie ona wymagana. W efekcie, metodę można określić mianem quasi-newtonowskiej albo newtonowskiej.

Metody niewykorzystujące pochodnych są rozwinięciem popularnej metody Nelderera - Meada (1965). W uproszczeniu, polega ona na stopniowym przekształcaniu sympleksu (w przestrzeni dwuwymiarowej jest to trójkąt, w trójwymiarowej - czworościan itd.) - tak, aby w kolejnej iteracji najgorszy (tj. o najgorszej wartości funkcji celu) punkt zastąpić nowym, specjalnie utworzonym punktem. Dzięki temu sympleks przesuwają się w stronę przeciwną niż najgorszy punkt. Krok przesunięcia wydłuża się, jeżeli nowy punkt staje się najlepszym spośród wierzchołków sympleksu lub skraca, gdy nowy punkt jest lepszy jedynie od dotychczas najgorszego wierzchołka.

Bardziej złożonym algorytmem nie wymagającym pochodnych jest *newuoa* (Powell, 2007), którego nazwa prawdopodobnie pochodzi od akronimu: „NEW Unconstrained Optimization Algorithm” (nowy algorytm optymalizacji bez ograniczeń). Polega on na utworzeniu, w każdej, k -tej iteracji, funkcji q_k za pomocą kwadratowej interpolacji funkcji celu f o n zmiennych, a następnie minimalizacji q_k w obrębie dopuszczalnego obszaru (ang. trust region), który stopniowo ulega zawężeniu. Interpolacja nie zakłada jednak styczności funkcji q z funkcją f w n punktach, tylko w $m < n$, a dodatkowymi warunkami niezbędnymi do wyznaczenia współczynników funkcji Q są warunki na to, aby macierze drugich pochodnych q w kolejnych iteracjach były możliwie zbliżone (w sensie normy Frobeniusa, czyli pierwiastka z sumy kwadratów wszystkich elementów macierzy).

Na bazie algorytmu *newuoa*, Powell (2007) utworzył algorytm *bobyqa* („Bound Optimization BY Quadratic Approximation” - optymalizacja z ograniczeniami poprzez aproksymację kwadratową), który różni się od poprzedniego wprowadzonymi do modelu optymalizacyjnego ograniczeniami nałożonymi na zmienne decyzyjne. Uwzględnienie ograniczeń pozwala na uproszczenie i skrócenie pewnych obliczeń. Autorzy pakietu *optimx* zastrzegali (Nash i Varadhan, 2011, s. 4), że dopiero testują, czy *bobyqa* rozwiązuje problemy bez ograniczeń tak skutecznie jak *newuoa*. Dlatego na razie obie metody zostały zawarte w pakiecie.

Kelley (1999, s. 141) zauważył, że algorytm Nelderera-Meada ma tendencję do utykania w ekstremum lokalnym. Kryterium detekcji utknięcia, jakie przyjął, polegało na sprawdzeniu, czy wartość funkcji celu w najlepszym wierzchołku poprawia się wystarczająco silnie w kolejnej iteracji. Postęp ów jest porównywany z kwadratową normą gradientu sympleksu pomnożoną przez niewielką stałą. Jeżeli postęp występuje, ale jest niewystarczający, algorytm ulega ukierunkowanemu restartowi (ang. oriented restart). Wszystkie wierzchołki, poza najlepszym, zostają przesunięte o połowę odległości między najlepszym wierzchołkiem a jego najbliższym sąsiadem. Taki zabieg zapewnia też korzystną właściwość sympleksu, tj. ograniczenie wzrostu współczynnika uwarunkowania (ilorazu norm macierzy i jej odwrotności). W pakiecie *optimx* metoda *nmkb* została zaimplementowana za zgodą Kelleya przez Varadhana, który dokonał „pewnych nietrywialnych modyfikacji” (szczegóły w dokumentacji pakietu *dfoptim*).

Ostatnim algorytmem niewymagającym obliczania pochodnych jest algorytm Hooka-Jeevesa (1961), wprowadzony do pakietu *dfoptim* przez Borchersa również na podstawie algorytmu z książki Kelleya (1999), a następnie wykorzystany w pakiecie *optimx*. Metoda Hooka-Jeevesa wymaga określenia ex ante punktu startowego i macierzy bazy ortogonalnej (może być nią np. macierz jednostkowa). Najpierw sprawdzane są wartości funkcji celu w kolejnych punktach położonych w ustalonej odległości, w kierunkach wyznaczonych przez wektory ww. macierzy oraz w kierunkach im przeciwnych (czyli w wybranych punktach „naokoło” punktu centralnego). Gdy tylko w pewnym punkcie nastąpi poprawa wartości funkcji, to staje się on nowym punktem bazowym. Jednak, wbrew intuicji, nie staje się on nowym centralnym punktem w drugiej rundzie eksploracji punktów. Algorytm Hooka-Jeevesa określa się mianem „agresywnego” (Kelley, 1999, s. 146), gdyż nowym centrum staje się punkt położony w tym samym kierunku, co nowy punkt bazowy, ale dwa razy dalej od poprzedniego punktu centralnego. Dzięki temu ogranicza się częstość ponownego sprawdzania tych samych punktów. Jeżeli w nowej iteracji nie uda się uzyskać poprawy, to nowym centrum staje się dotychczasowy punkt bazowy. Jeżeli powtórnie

obniżenie wartości funkcji celu nie będzie możliwe, to skracana jest odległość, zgodnie z którą wyznaczone są punkty „naokoło” punktu centralnego. Algorytm kończy działanie, gdy odległość ta obniży się poniżej ustalonego progu.

Celem lepszego przybliżenia metod newtonowskich i quasi-newtonowskich, wykorzystujących nie tylko wektor pierwszych, ale także macierz drugich pochodnych zwaną hesjanem, warto zacząć od przedstawienia klasycznej metody Newtona. Zgodnie z twierdzeniem Taylora, funkcję nieliniową $f(x)$ można aproksymować w otoczeniu punktu x_c za pomocą następującej funkcji kwadratowej (por. Kelley, 1999, s. 15):

$$f(x) \approx m_c(x) = f(x_c) + \nabla f(x_c)^T(x - x_c) + \frac{1}{2}(x - x_c)^T \nabla^2 f(x_c)(x - x_c).$$

Jeżeli $\nabla^2 f(x_c)$ jest macierzą dodatnio określoną, to x_+ stanowi minimum lokalne $f(x)$, gdy $\nabla m_c(x_+) = 0$.

$$0 = \nabla m_c(x_+) = \nabla f(x_c) + \nabla^2 f(x_c)(x_+ - x_c)$$

Stąd:

$$x_+ = x_c - (\nabla^2 f(x_c))^{-1} \nabla f(x_c)$$

$$\nabla^2 f(x_c)(x_+ - x_c) = -\nabla f(x_c).$$

Podstawowym algorytmem służącym do poszukiwania minimum lokalnego jest metoda Newtona:

1. Oblicz $\|\nabla f(x)\|$
2. (a) Dopóki $\|\nabla f(x)\| > \varepsilon$
 - (b) Oblicz $\nabla^2 f(x)$
 - (c) Rozwiąż $\nabla^2 f(x)d = -\nabla f(x)$
 - (d) Zastąp x przez $x + d$
 - (e) Oblicz $\nabla f(x)$.

Istnieje wiele odmian metody Newtona. Wektor g przybliżający gradient ∇f może być obliczony w kroku (e) ze wzoru analitycznego albo aproksymowany za pomocą skończonych różnic, macierz H przybliżająca hesjan $\nabla^2 f$ może być kalkulowana w kroku (b) jeszcze na trzeci sposób - metodą BFGS - od nazwisk autorów: Broydena, Fletchera, Goldfarba i Shano (Head, Zerner, 1985). W niektórych algorytmach, w celu zaoszczędzenia czasu, kalkulacja gradientu i hesjanu nie odbywa się w każdej iteracji. W pewnych algorytmach nowy x powstaje w kroku (d) z kolei poprzez dodanie do starego x pewnej modyfikacji d , tj. λd , gdzie λ określa długość kroku w kierunku gradientu za pomocą jednej z metod: wyszukiwania liniowego (Kelley, 1999, s. 39-50), dogleg (Dennis, Mei, 1979) lub hookstep (Moré, 1978). Więcej na temat różnych odmian metody Newtona można przeczytać w artykule Schnabela, Koontza i Weissa (1985). Inną ważną kwestią stanowi sposób rozwiązania układu równań (c). Zazwyczaj stosowana jest w tym celu metoda dekompozycji macierzy Choleskiego, lecz wymaga ona dodatniej określoności macierzy współczynników układu równań. Powstały zatem metody odporne na brak dodatniej określoności $\nabla^2 f$ - wykorzystują one inne macierze współczynników - należą do nich m.in. dogleg i hookstep. Generalnie, metody polegające na aproksymacji, a nie obliczaniu wprost hesjanu nazywają się quasi-newtonowskimi.

W pakiecie *optimx* zostały zaimplementowane dwa algorytmy newtonowskie (Nash i Varadhan, 2011, s. 5). Oznacza to, że dopuszczają one podanie funkcji obliczającej hesjan, co umożliwi zastosowanie wprost metody Newtona. Jednak w niniejszej pracy nie skorzystano z tej opcji. Zamiast niej, we wszystkich algorytmach newtonowskich i quasi-newtonowskich zastosowano numeryczne przybliżenia gradientu i hesjanu, czyli w praktyce posługiwano się algorytmami quasi-newtonowskimi.

Pierwszy algorytm, *nlm* (ang. nonlinear minimization) został opracowany na podstawie algorytmu stworzonego przez Dennisa i Schnabela (1983), opisanego także w pracy Schnabela, Koontza i Weissa (1985). Procedura *nlm* wykorzystuje przeszukiwanie liniowe w etapie (d) wyżej przytoczonego algorytmu - „z kwadratową interpolacją dla pierwszego nawrotu oraz sześcienną interpolacją dla każdego następnego nawrotu w każdej iteracji” (Schnabel, Koontz, Weiss, 1985, s. 8). W artykule tym można także poznać szczegóły techniczne algorytmu, dotyczące m.in.: kryteriów stopu; długości kroku potrzebnego do numerycznej aproksymacji pochodnych, a także sposobu ich obliczania (w początkowych iteracjach następnikowe, następnie centralne); aproksymacji hesjanu w sytuacji, gdy nie jest on macierzą dodatnio określoną; skalowania zmiennych niezależnych (co sprowadza się np. do podzielenia przez milion wartości tych zmiennych, których rząd wielkości jest bliski miliona, itd.).

Metoda *BFGS* należy do klasy metod opartych na równaniu siecznej:

$$H_+(x_+ - x_c) = \nabla f(x_+) - \nabla f(x_c). \quad (20)$$

Wszystkie metody siecznych, w tym *BFGS*, dla optymalizacji jednowymiarowej sprowadzają się do równania (21). Na jego podstawie można stwierdzić, że metoda siecznych przybliża drugą pochodną za pomocą względnego przyrostu $f'(x)$ na odcinku wyznaczonym przez x z poprzednich iteracji (x_0 i x_1):

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)(x_1 - x_0)}{f'(x_1) - f'(x_0)} = x_1 - \frac{f'(x_1)}{\frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0}} \approx x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}. \quad (21)$$

Równanie dla funkcji wielu zmiennych przedstawia się następująco (Davidon, 1959; Fletcher i Powell, 1963):

$$H_+ = H_c + \frac{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T}{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T(x_+ - x_c)} - \frac{(H_c(x_+ - x_c))(H_c(x_+ - x_c))^T}{(x_+ - x_c)^T H_c(x_+ - x_c)}. \quad (22)$$

W celu zbudowania intuicji można zauważyć, że gdyby móc poskracać w równaniu (22) te same wyrażenia w liczniku i mianowniku (co nie jest dopuszczalne w rachunku macierzowym), to uzyskalibyśmy równanie (20).

W pakiecie *optimx* metoda *BFGS* została zmodyfikowana w oparciu o poprawki (m.in. dotyczące eliminacji wyszukiwania liniowego, które wyznacza x_+) autorstwa Fletchera (1970) i Nasha (1979).

Z kolei pakiet *nlminb* wykorzystuje tzw. procedury (ang. routines) PORT zakodowane i opisane przez Gaya (1990), który z kolei opierał się m.in. na metodzie Davidona zmodyfikowanej przez Stewarta (1967).

Następny algorytm, *L-BFGS-B*, został opisany przez Byrda i in. (1995). Dodane w jego nazwie litery to skróty od „limited-memory” (L) i „bounded” (B). Jest to bowiem algorytm zaprojektowany w celu zmniejszenia wymogów pamięciowych służących do obliczania i przechowywania dodatnio-określonej aproksymacji hesjanu. Ponadto, algorytm ten jest przeznaczony do problemów z warunkami ograniczającymi argumenty funkcji celu. Szkic tej metody można przedstawić następująco:

1. Zatrzymaj, jeżeli test zbieżności jest spełniony.
2. Oblicz punkt Cauchy'ego. Punkt ten stanowi minimum kwadratowego modelu minimalizowanej funkcji, wzdłuż gradientu, ale przy założeniu, że x mieści się na odcinku wyznaczonym przez warunki ograniczające.
3. Oblicz kierunek przeszukiwania np. metodą gradientu sprzężonego.
4. Wykonaj przeszukiwanie liniowe, przy zadanym warunku wymaganego spadku oraz wyznacz długość kroku.
5. Oblicz gradient w znalezionym punkcie.
6. Jeżeli zmiana gradientu spełnia warunek krzywizny, to zaktualizuj listę par korekty - zastępując najstarszą przez najnowszą. Przez listę par korekty należy rozumieć m ostatnich par w postaci: $(s_i, y_i) = (x_{k+1} - x_k, \nabla_{k+1} - \nabla_k)$
7. Wyznacz aproksymację hesjanu przy użyciu aktualnej listy par korekty. Można to osiągnąć względnie szybko w sensie złożoności obliczeniowej, z wykorzystaniem odpowiednich wzorów.
8. Zwiększ numer iteracji o 1 i wróć do punktu 1.

Ostatni quasi-newtonowski algorytm użyty w optymalizacji numerycznej, *ucminf* (Nielsen, 2000), również wykorzystuje metodę BFGS, a także miękkie wyszukiwanie liniowe¹² z wykorzystaniem metody zaufanego obszaru. W przeciwieństwie do wcześniej opisaney metody *BFGS*, *ucminf* aproksymuje odwrotność hesjanu za pomocą wzoru będącego odpowiednikiem równania (22):

$$H_+^{-1} = \left(I - \frac{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))(x_+ - x_c)^T}{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T(x_+ - x_c)} \right)^T H_c^{-1} \left(I - \frac{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))(x_+ - x_c)^T}{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T(x_+ - x_c)} \right)^T + \frac{(x_+ - x_c)(x_+ - x_c)^T}{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T(x_+ - x_c)}.$$

Kolejne metody wymagają obliczania pochodnych funkcji celu, ale nie wymagają kalkulacji macierzy przybliżonego hesjanu. W pierwszym kroku algorytmu *cg* (ang. conjugate gradient - gradient sprzężony) oblicza się gradient funkcji celu w punkcie startowym. W ten sposób wyznacza się kierunek najszybszego spadku wartości funkcji. Za pomocą metody optymalizacji jednowymiarowej funkcji celu (np. ww. metody Newtona), określa się minimum na odcinku położonym wzdłuż owego kierunku. Punkt ten staje się punktem startowym w drugiej iteracji. Ponownie obliczany jest kierunek najszybszego spadku. Jednak począwszy od drugiej iteracji, kierunek, wzdłuż którego wyszukuje się kolejny punkt, stanowi sumę bieżącego kierunku najszybszego spadku oraz pomnożonego przez parametr β kierunku z poprzedniej iteracji. Domyślna formuła na β , w pakiecie *optimx* pochodzi z artykułu Fletchera i Reevesa (1964) i stanowi iloraz kwadratów norm gradientów z następujących po sobie iteracji. Im większy postęp w optymalizacji, tj. norma gradientu z bieżącej iteracji mniejsza co do modułu od normy z poprzedniej iteracji, tym mniejsza korekta kierunku najszybszego spadku.

Algorytm *spg* (ang. spectral projected gradient) pochodzi z artykułu Birgina, Martíneza i Raydana (2001). Punktem wyjścia tej metody stanowi równanie siecznej (20) (por. Birgin, Martínez,

¹²Wyszukiwanie liniowe może być dokładne lub miękkie. Pierwsza metoda polega na dokładnym poszukiwaniu minimum funkcji w zadanym kierunku. Druga metoda polega na odnalezieniu w zadanym kierunku punktu, dla którego wartość funkcji wystarczająco obniża się, a następnie na aktualizacji kierunku. Wyszukiwanie miękkie jest częściej stosowane w praktyce, gdyż wymaga mniejszej liczby operacji, a przy tym zadany kierunek przeszukiwania przeważnie jest tylko kierunkiem w przybliżeniu prowadzącym do ekstremum funkcji.

Raydan i in., 2014). W *spg* zakłada się bardzo prostą postać macierzy $H_+ = \sigma I$. Równanie sieciowej można więc zapisać następująco:

$$\sigma(x_+ - x_c) \approx \nabla f(x_+) - \nabla f(x_c).$$

Dokładne rozwiązanie tego równania nie istnieje, ale istnieje rozwiązanie minimalizujące sumę kwadratów reszt¹³:

$$\sigma = \frac{(x_+ - x_c)^T (\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))}{(x_+ - x_c)^T (x_+ - x_c)}.$$

Dodatkowo nakłada się ograniczenie: $\sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}$. Jednocześnie σ stanowi tzw. iloraz Rayleigha w odniesieniu do macierzy uśrednionego hesjanu na przedziale (x_c, x_+) . Skądinąd wiadomo, że iloraz Rayleigha należy do przedziału pomiędzy minimalną a maksymalną wartością własną uśrednionego hesjanu. Zbiór wszystkich wartości własnych danej macierzy nazywa się spektrum macierzy, co tłumaczy genezę nazwy metody. Ostatecznie zatem w metodzie *spg*, macierz $\nabla^2 f(x)$ zostaje zastąpiona przeskalowaną macierzą jednostkową σI w punkcie c) algorytmu Newtona. Zmodyfikowany jest także punkt d), gdzie stosuje się przeszukiwanie liniowe.

Niektóre z metod optymalizacji omawianych w niniejszym podrozdziale umożliwiają wprowadzenie wprost warunków ograniczających. Mimo to, wszystkie metody optymalizacji stosowanego tutaj metaalgorytmu zastosowano dla funkcji celu bez ograniczeń. Warunki ograniczające wymienione w podrozdziale 3.1 zostały bowiem uwzględnione w funkcji celu w postaci tzw. składnika kary pomnożonego przez największą co do modułu wartość zmiennej decyzyjnej. Kara przyjmuje wartość zerową, jeżeli żaden z 24 warunków ograniczających (dwanaście na ujemność zmiennych decyzyjnych: $c_t, i_t, u_t, t \in \{1, 2, 3, 4\}$, cztery w postaci $u_t > U_t$, cztery na reguły nadwyżki bieżącej i cztery na reguły IWZ) nie jest spełniony. Za każdy niespełniony warunek wartość kary rośnie o 9999 (czyli bardzo dużą liczbę w porównaniu z typowymi wartościami funkcji celu). Pomnożenie kary przez największą co do modułu wartość zmiennej decyzyjnej zabezpiecza przed sytuacją, gdy kara wprawdzie nie byłaby zerowa, ale mimo to algorytm wybierałby takie rozwiązanie jako optymalne, gdyż zmienne decyzyjne przyjmowałyby wartości o ogromnym rzędzie wielkości (nie mające interpretacji ekonomicznej). W części aneksu (C.1), w sekcji „deklaracja funkcji użyteczności” zaprezentowano funkcję celu ze składnikiem kary dla algorytmu szukającego optymalnego rozwiązania dla trzeciego roku. W tym przypadku kara składa się z dziewięciu warunków ograniczających (m.in. bez ograniczeń na zmienne z pierwszego i drugiego roku).

4 Dobór wartości parametrów strukturalnych modelu

Aby rozwiązać problem optymalizacyjny, przed którym stoi samorząd, należy podstawić wartości liczbowe pod parametry strukturalne: $\alpha, \beta, v, \theta, r, \chi, \gamma, \delta$ oraz wartości startowe pod zmienne: b_t, c_t i k_t . W niniejszym rozdziale opisano sposób, w jaki określono wartości średnie parametrów oraz zdefiniowano ich rozkłady, które posłużyły następnie do analizy wrażliwości wyników bazowych na zmiany parametryzacji.

¹³Jest to równanie odpowiadające ekonometrycznemu estymatorowi klasycznej metody najmniejszych kwadratów: $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} (X^T y)$.

4.1 Kalibracja parametrów i wartości startowych modelu w oparciu o dane empiryczne dla Polski

4.1.1 Limit dochodów unijnych

Przeciętny poziom limitu dochodów pochodzących z funduszy unijnych w relacji do dochodów bieżących, v i przedział, z którego limit ten może przyjmować wartości w analizie wrażliwości, zostały oszacowane na podstawie szeregu czasowego z Banku Danych Lokalnych (BDL). Szereg nosi nazwę „finansowanie i współfinansowanie programów i projektów unijnych: dochody razem”, odnosi się do gmin i miast powiatowych i obejmuje lata 2010-2015. Do 2009 r. Główny Urząd Statystyczny opracowywał szereg o nazwie „środki gmin i miast powiatowych z budżetu UE przeznaczone na inwestycje w latach 2006-2009”. Jednak, z uwagi na różnice metodologiczne, zrezygnowano z uwzględniania tego archiwalnego szeregu.

Tabela 1 zawiera trzy statystyki podsumowujące każdy rok objęty obserwacją - średnią i medianę dochodów unijnych w relacji do dochodów bieżących powiększone o dwa odchylenia standardowe oraz wartość 95 percentyla. Ostatecznie przyjęto domyślną wartość parametru v w wysokości 25%, a na potrzeby analizy wrażliwości losowano v z rozkładu trójkątnego o wierzchołkach w punktach: 20%, 25% i 35%. Szerokość przedziału odzwierciedla niepewność towarzyszącą definicji zmiennej oraz zróżnicowanie tej zmiennej w różnych gminach oraz latach.

Tabela 1: Dochody przeznaczone na inwestycje unijne w relacji do dochodów ogółem gmin i miast powiatowych

rok	2010	2011	2012	2013	2014	2015
średnia $+2\sigma$	28,8%	35,0%	27,7%	22,2%	23,1%	23,4%
mediana $+2\sigma$	25,3%	31,5%	25,0%	19,9%	20,8%	20,7%
95 perc.	27,7%	31,7%	26,2%	20,6%	20,2%	23,6%

Źródło: Bank Danych Lokalnych GUS

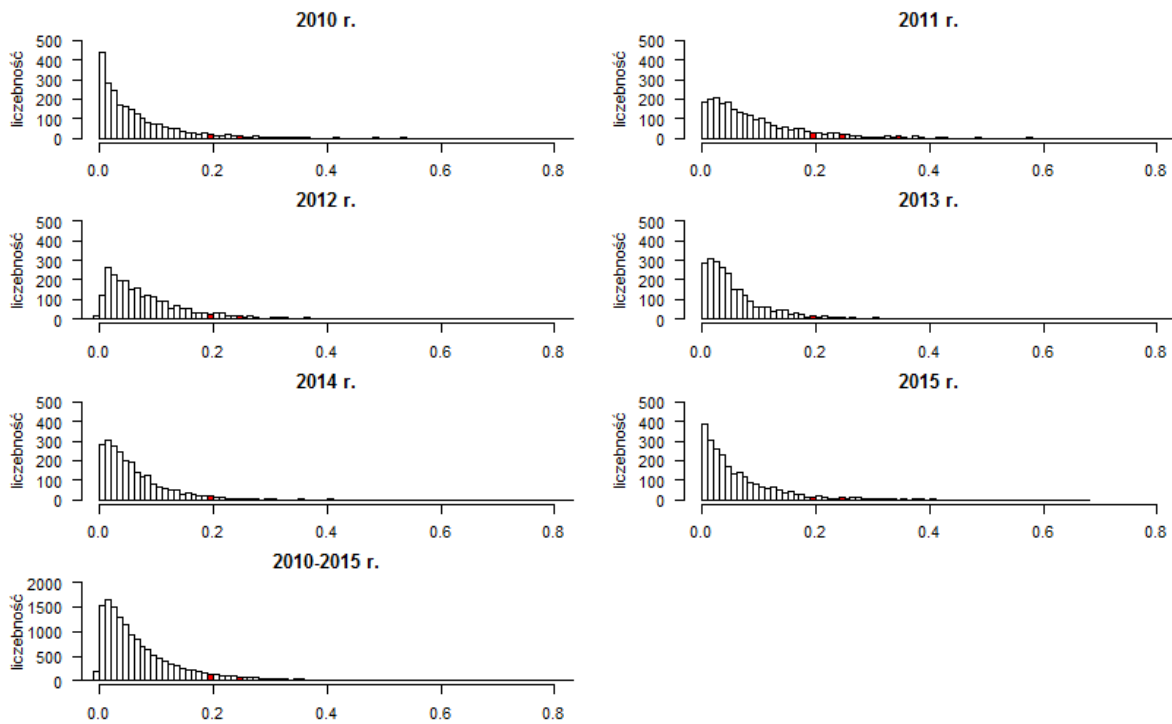
4.1.2 Udział finansowania własnego inwestycji unijnych

Wartość parametru θ , oznaczającego kwotę finansowania własnego na każdego złotego przypadającego z finansowania unijnego, została określona na podstawie danych przytoczonych przez Sieraka (2015), według którego „analiza projektów zamieszczonych w bazie SIMIK wykazała w obecnej perspektywie następujący faktyczny poziom dofinansowania środkami unijnymi:

- dla gmin - 58,35%;
- dla powiatów - 64,68%;
- dla województw - 70,26%;
- średnio dla jednostek samorządu terytorialnego - 62,05%”.

Oznacza to, że jako wartość bazową należy przyjąć $\theta = 0,62$. Wtedy bowiem $\frac{1}{\theta+1} \approx 0,62$ (zbieżność liczb przypadkowa), czyli dla tak określonej wartości θ poziom dofinansowania środkami unijnymi w modelu jest spójny z poziomem przeciętnym dla JST oraz zwykłą średnią dla gmin i powiatów (województwa wyłączono, gdyż nie są rozpatrywane w niniejszej pracy). Zakładając, że udział finansowania unijnego może się wahać od 50% do 70%, to $0,43 < \theta < 1$ - krańce niniejszego przedziału oraz 0,62 stanowią wierzchołki opisujące rozkład trójkątny, wykorzystywany w analizie wrażliwości.

Rysunek 1: Rozkłady: dochodów unijnych w relacji do dochodów bieżących w gminach i miastach powiatowych w latach 2010-2015



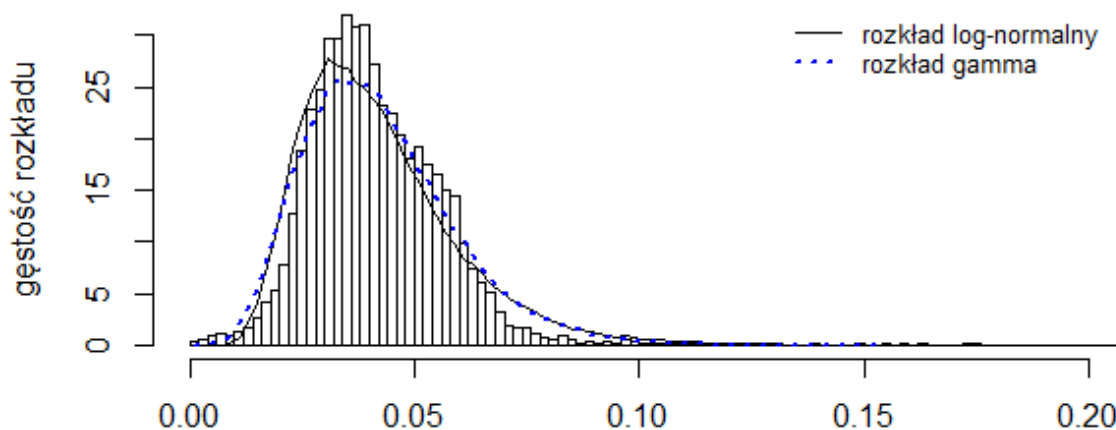
Źródło: Bank Danych Lokalnych GUS

Wszystkie następnie omawiane w tym rozdziale parametry, z wyjątkiem δ i k , zostały skalibrowane w oparciu o dane pochodzące z wieloletnich prognoz finansowych jednostek samorządu terytorialnego. Dane te są zamieszczone na stronie Ministerstwa Finansów (www.mf.gov.pl / Działalność / Finanse publiczne / Budżety JST / Sprawozdania budżetowe / Wieloletnia prognoza finansowa JST). Najwcześniejsze pliki pochodzą z 2013 r. i zawierają informacje o wykonaniu budżetów począwszy od roku 2010. Dane za poszczególne lata były pozyskiwane z możliwie najnowszych plików, maksymalnie z pliku pochodzącego z 5 sierpnia 2016 r. Szeregi czasowe za lata 2010-2015 obejmują 2477 gmin i miast powiatowych. Nie zostały uwzględnione jedynie: gmina wiejska Zielona Góra (funkcjonująca do 2014 r.) i gmina Choszczno (brak w danych z 2013 r.), gdyż w przeciwnym razie próba byłaby niezbilansowana.

4.1.3 Stopa procentowa i stopa zapadalności długu

Rozkłady empiryczne parametrów związanych z długiem: stopy procentowej r i odsetka zapadającego długu χ , cechowały się wyraźną asymetrią, więc w celu dopasowania rozkładu teoretycznego wzięto pod uwagę rozkłady: logarytmiczno-normalny i gamma. Rozkłady teoretyczne parametru r szacowano na podstawie rozkładu empirycznego ilorazu wydatków na obsługę długu i kwoty długu z roku poprzedniego, przy czym spośród 11890 historycznie zaobserwowanych wartości, pozostawiono 11735 pochodzących z przedziału $(0, 1)$. Za wartość domyślną r do symulacji przyjęto medianę z ww. przedziału, tj. 0,039. Z wykresu 2 wynika, że oba rozkłady teoretyczne charakteryzują się podobnym stopniem dopasowania. Ostatecznie wybrano rozkład gamma ze względu na nieco niższą statystykę testu Kolmogorowa-Smirnowa (KS) (0,047) w porównaniu z rozkładem log-normalnym (0,050).

Rysunek 2: Histogram wydatków na obsługę długu w relacji do poziomu długu z roku poprzedniego gmin i miast powiatowych - tj. stopy procentowej r - w latach 2011-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami log-normalnym i gamma



wydatki na obsługę długu w latach 2011-2015 w relacji do długu z roku poprzedniego

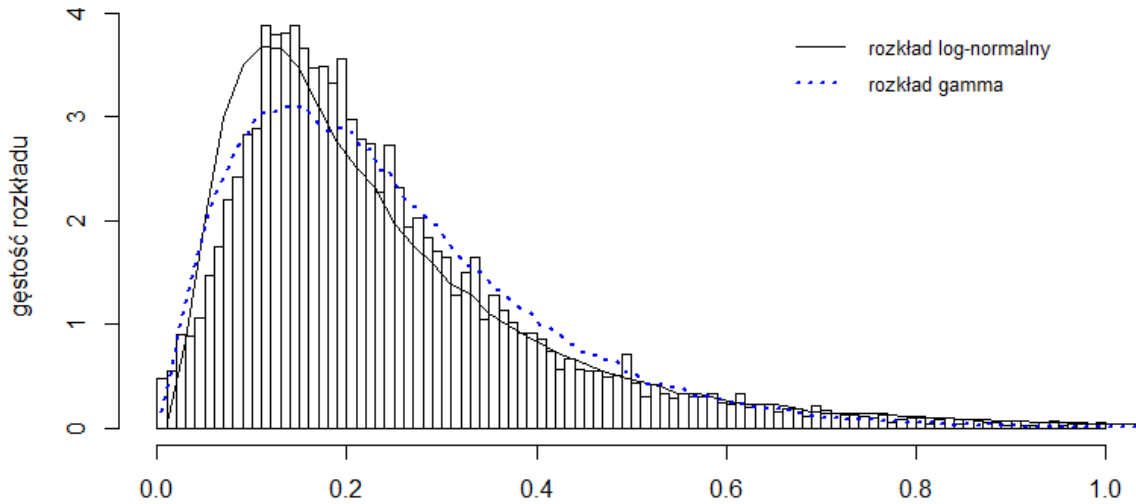
Źródło: MF i obliczenia własne

Wartość p statystyki KS w obu przypadkach była bardzo bliska zeru. Przy każdym konwencjonalnym poziomie istotności należy zatem odrzucić hipotezę, że wartości empiryczne pochodzą z któregoś z powyższych rozkładów teoretycznych.¹⁴ Uznano jednak, że rozkład gamma jest wystarczająco podobny dla celów symulacji.

Rozkłady teoretyczne parametru χ estymowano w oparciu o rozkład empiryczny spłaty rat kapitałowych kredytów i pożyczek oraz wykupu papierów wartościowych w relacji do kwoty długu z roku poprzedniego. Z 11890 obserwacji (niemal pełna populacja gmin w latach 2011-15) wyeliminowano te, które wykraczały poza przedział $(0, 1)$, po czym zostało 11520 liczb. Mediana, 0,2, stanowi wartość bazową dla χ w symulacjach. Ponownie zdecydowano się na wybór rozkładu gamma (statystyka KS równa 0,033), a nie log-normalnego (0,053), patrz wykres 3. Ponownie również bootstrapowe wartości p testu KS wyniosły 0.

¹⁴Klasyczny test KS zakłada, że rozkład teoretyczny jest z góry ustalony. W wyżej omawianym przypadku założenie to nie zostało spełnione, ponieważ parametry rozkładu teoretycznego były szacowane w oparciu o rozkład empiryczny. W takich sytuacjach wartości p są zawyżone, co sprzyja nieodrzucaeniu hipotezy zerowej. Aby uzyskać nieobciążone wartości p , należy przeprowadzić tzw. „bootstrapowy” test KS. Polega on na losowaniu z rozkładu teoretycznego z oszacowanymi parametrami wielu (tutaj przyjęto liczbę 1 tysiąca) prób, o liczebności równej liczebności próby empirycznej. Dla każdej próby losowej wylicza się statystykę testu KS. Następnie oblicza się, ile procent statystyk przyjęło większą wartość niż statystyka odpowiadająca próbie empirycznej. Ów procent stanowi nieobciążone oszacowanie wartości p testu KS. W przypadku parametru r , bootstrapowe wartości p dla rozkładu gamma i log-normalnego wyniosły 0.

Rysunek 3: Histogram spłaty rat kapitałowych kredytów i pożyczek oraz wykupu papierów wartościowych w relacji do poziomemu długu z roku poprzedniego gmin i miast powiatowych, χ , w latach 2011-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami log-normalnym i gamma



spłata rat kapitałowych i wykup papierów wart. w latach 2011-2015 w relacji do długu z roku poprzedniego

Źródło: MF i obliczenia własne

Dla porównania, w tabeli 2 można zaobserwować odpowiedniki parametrów r i χ we wszystkich JST ogółem - zaprezentowane tam wartości nie odbiegają silnie od oszacowanych.

Tabela 2: Dane dotyczące zadłużenia JST ogółem w mln zł

rok	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
spłata rat	7349	6452	6132	7164	9615	10105	11839	8001	8292
obsługa długu	994	1316	1400	1852	2711	3490	2820	2424	2021
zadłużenie	25876	28775	40294	55094	65756	67835	69159	72110	71635
χ (rok)	28,4%	22,4%	15,2%	13,0%	14,6%	14,9%	17,1%	11,1%	11,6%
r (rok)	3,8%	4,6%	3,5%	3,4%	4,1%	5,1%	4,1%	3,4%	2,8%

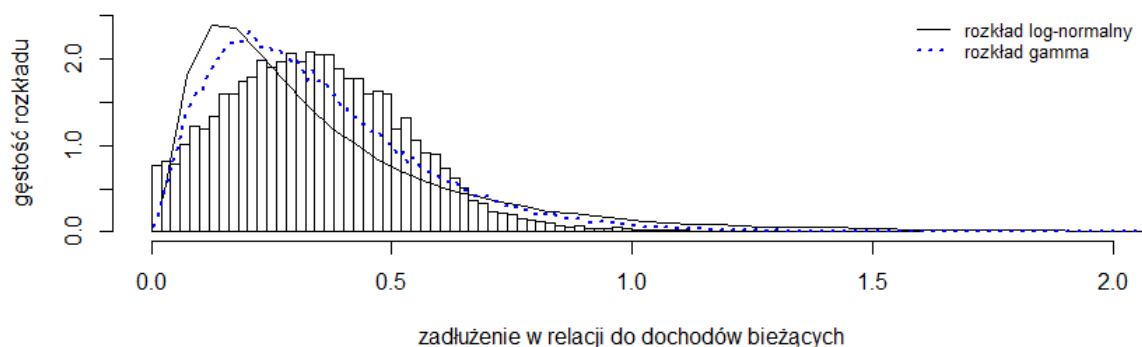
Źródło: Sprawozdanie z działalności regionalnych izb obrachunkowych i wykonania budżetu przez jednostki samorządu terytorialnego w 2015 roku (oraz sprawozdania z lat poprzednich) i obliczenia własne

4.1.4 Wskaźnik zadłużenia

Medianowy wskaźnik zadłużenia w całej populacji wyniósł 0,32 i wartość ta została przyjęta jako bazowa dla parametru $b = \frac{b_t}{y_t}$. Co ciekawe, w iloczynie 2477 gmin i miast powiatowych i 6 lat (2010-2015), zanotowano aż 3,8% przypadków, dla których dług był zerowy. Uznano zatem, że rozkład teoretyczny powinien stanowić mieszaną rozkładu atomowego (0 z prawdopodobieństwem 0,038) i rozkładu ciągłego, który opisz 14280 obserwacji, dla których dług mieści się w przedziale (0, 2) dochodów bieżących. Owym rozkładem ciągłym okazał się gamma, którego odległość z testu KS była mniejsza (0,07) niż rozkładu log-normalnego (0,12). Nieco

lepsze dopasowanie rozkładu gamma obrazuje także wykres 4. Niestety, wartości p w wszystkich testów KS były zerowe lub bardzo zbliżone do zera.

Rysunek 4: Histogram wskaźnika zadłużenia w relacji do dochodów bieżących gmin i miast powiatowych, b , w latach 2010-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami gamma i log-normalnym



Źródło: MF i obliczenia własne

Powyższe rezultaty można porównać ze statystykami opartymi na corocznych „Sprawozdaniach z działalności regionalnych izb obrachunkowych i wykonania budżetu przez jednostki samorządu terytorialnego”. Znajdują się tam statystyki łącznego zadłużenia (zobowiązań zaliczanych do długu publicznego) gmin, miasta Warszawy oraz innych miast powiatowych za lata 2010-2015 (tabela 3). Wynika z nich, że średnie zadłużenie ogółem (43% – 49%) jest nieco wyższe niż domyślna wartość parametru (32%). Zjawisko to można tłumaczyć wpływem wyższych wskaźników zadłużenia w większych miastach na średnią ważoną i brakiem tego wpływu na medianę.

Tabela 3: Dane dotyczące zadłużenia gmin i miast powiatowych w mln zł

zadłużenie JST	2010	2011	2012	2013	2014	2015
gminy	21.930	25.990	26.168	25.772	26.463	25.429
Warszawa	5.291	5.966	5.696	5.925	6.038	5.858
miasta powiaty	18.146	22.108	23.883	24.959	26.409	27.352
razem	45.367	54.065	55.747	56.656	58.910	58.639
dochody	105.555	109.885	115.370	118.806	124.723	128.392
wskaźnik b	0,43	0,49	0,48	0,48	0,47	0,46

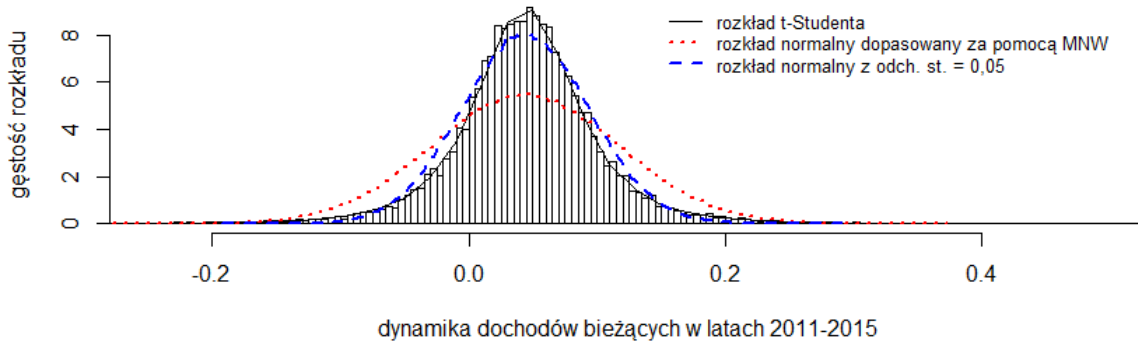
Źródło: Sprawozdania z działalności RIO i wykonania budżetu przez JST 2011-2015 oraz Bank Danych Lokalnych GUS

4.1.5 Dynamika dochodów bieżących

Następnym parametrem wykorzystywanym w symulacjach jest parametr γ - dynamika dochodów bieżących. Mediana rozkładu empirycznego wyniosła 0,044, co stanowi wartość domyślną w symulacjach.

Na powyższym histogramie można zaobserwować, że rozkład normalny dopasowany za pomocą metody największej wiarygodności znacząco różni się od rozkładu empirycznego. Efektywność

Rysunek 5: Histogram dynamiki dochodów bieżących gmin i miast powiatowych w latach 2011-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami t-Studenta i normalnego



Źródło: MF i obliczenia własne

MNW została obniżona na skutek występowania obserwacji odstających. Dlatego pod uwagę wzięto także inny rozkład normalny - o tej samej wartości oczekiwanej, co pierwotny, ale o mniejszym odchyleniu standardowym (0,05 zamiast 0,07). Wprawdzie wartości p zarówno z klasycznego i bootstrapowego testu KS dla obu rozkładów normalnych wynoszą odpowiednio prawie zero i zero, ale odległość KS jest 4-krotnie mniejsza w przypadku rozkładu z ekspercko dobranym odchyleniem standardowym. Tak czy inaczej, z histogramu parametru γ wynika, że nawet ów drugi rozkład normalny gorzej od t-Studenta opisuje ogony rozkładu empirycznego. Tę obserwację potwierdzają wyniki testu KS: wartości p dla rozkładu t-Studenta wynoszą odpowiednio 0,346 i 0,338. W związku z tym w symulacjach użyto właśnie rozkładu t-Studenta.

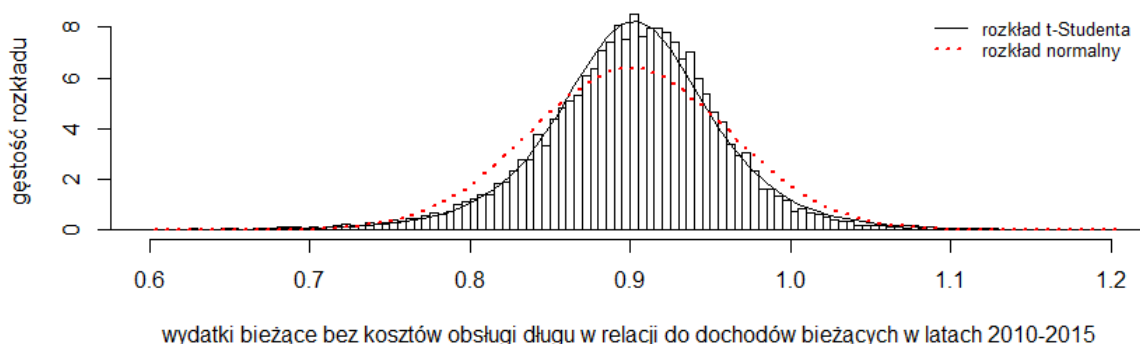
4.1.6 Wskaźnik wydatków bieżących

Mimo, że wydatki bieżące stanowią zmienną decyzyjną, w celu uzyskania rozwiązania analitycznego dla roku trzeciego, potrzebne są ich wartości dla roku pierwszego i drugiego. Dlatego także ta kategoria musi być - przynajmniej w części symulacji - generowana z rozkładu. Rozkład empiryczny c został otrzymany poprzez odjęcie kosztów obsługi długu od wydatków bieżących i podzielenie przez dochody bieżące ($\frac{c_t}{y_t}$). Test KS i wizualna ocena histogramu z nałożonymi wykresami rozkładów teoretycznych ponownie wskazują na rozkład t-Studenta. Wartość p klasycznego testu KS wyniosła bowiem dla tego rozkładu 0,0002 (blisko 0 dla rozkładu normalnego), a bootstrapowego - 0,001 (0 dla normalnego). Wartość medianowa wyniosła 0,90.

4.1.7 Wskaźnik wartości infrastruktury

Następnym analizowanym parametrem jest $k = \frac{k_t}{y_t}$, czyli wartość brutto środków trwałych w relacji do dochodów bieżących. Podstawowy problem związany z tą kategorią stanowi niejednorodność danych udostępnianych przez Bank Danych Lokalnych. Obecnie publikowana jest wartość brutto środków trwałych w gospodarce narodowej (zawierającej także sektor prywatny), tylko na szczeblu województw, w przeliczeniu na jednego mieszkańca. Tak zdefiniowana kategoria nie odpowiada zatem zmiennej wykorzystywanej w modelu opisywanym w niniejszej pracy. Wykorzystano więc o wiele bardziej odpowiedni szereg czasowy, tj. środki trwałe jednostek i zakładów budżetowych gmin, pogrupowanych w powiaty. Jednak był on opracowywany przez BDL jedynie do 2011 r. Ze względu na to, że mianownik parametru k stanowią dochody bieżące,

Rysunek 6: Histogram wydatków bieżących bez kosztów obsługi długu gmin i miast powiatowych w relacji do dochodów bieżących, c , w latach 2010-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami t-Studenta i normalnym



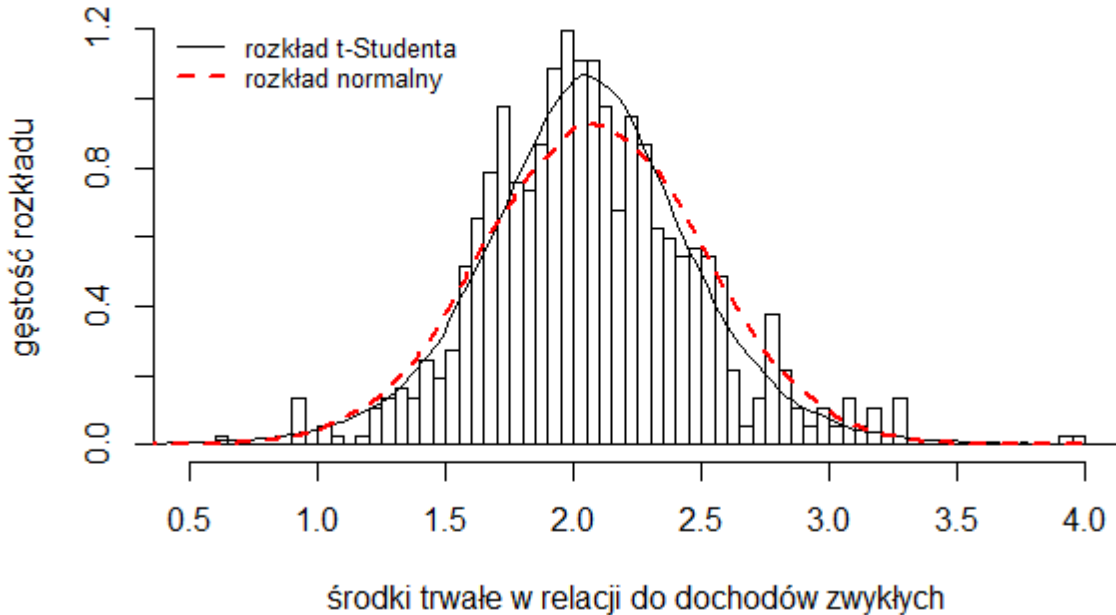
Źródło: MF i obliczenia własne

do jego obliczenia niezbędne są dochody unijne. Niestety, szereg „finansowanie i współfinansowanie programów i projektów unijnych” jest publikowany w BDL dopiero od 2010 r. Oznacza to, że dysponowano szeregami jednocześnie licznika i mianownika na szczeblu gmin wyłącznie za lata 2010-2011.

Na podstawie różnych kategorii z Banku Danych Lokalnych można pośrednio wnioskować o wzrostowym trendzie zmiennej k . Po pierwsze, w latach 2005-2008 średnia wartość środków trwałych jednostek i zakładów budżetowych gmin pogrupowanych w powiaty, w relacji do dochodów ogółem (czyli zawierających dochody unijne) oscylowała wokół 1,7, a następnie szybko wzrosła do 1,97 w 2011 r. Po drugie, średnia omawianego tutaj parametru k (czyli tym razem mianownik stanowiły dochody bieżące) wzrosła z 2,00 w 2010 r. do 2,15 w 2011 r. W 85% powiatów wskaźnik ten był wyższy w 2011 r. niż w roku poprzednim. Po trzecie, dynamika środków trwałych w województwach w gospodarce narodowej, w latach 2008-2014 była wyższa od dynamiki dochodów własnych JST, a także od nominalnego tempa wzrostu PKB. Przy założeniu względnie stabilnej liczby ludności, implikuje to, że relacja środków trwałych do dochodów publicznych i prywatnych także rosła. Wnioskowanie na podstawie powyższych obserwacji nie jest ścisłe (obserwacja 1. ignoruje wahania dochodów unijnych, obserwacja 2. dotyczy tylko dwóch lat, obserwacja 3. - województw, sektora prywatnego oraz centralnego podsektora publicznego). Powyższe obserwacje mogą jednak stanowić podstawę do wysunięcia hipotezy o stopniowym wzroście k . Ów wzrostowy trend środków trwałych w relacji do dochodów bieżących sprawia, że rozkład parametru k nie jest stały w czasie. Pomimo tego, w dalszej części pracy wykorzystano rozkład z lat 2010-2011, gdyż ma on na tyle dużą wariancję (obserwacje odstające pochodzą spoza przedziału 1,0 – 3,0, patrz wykres 7), że powinien obejmować także większość hipotetycznego rozkładu szacowanego dla lat po 2011 r.

Do rozkładu empirycznego k rozważano dopasowanie dwóch teoretycznych rozkładów: t-Studenta i normalnego. Empiryczne poziomy istotności wynikające ze zwykłego testu KS wyniosły odpowiednio: 0,614 i 0,078 i tylko nieznacznie różniły się od otrzymanych w bootstrapowym teście KS, tj. 0,606 i 0,072. Wyniki te przesądziły o wykorzystaniu rozkładu t-Studenta w analizie wrażliwości oraz przyjęciu 2,06 jako wartości bazowej dla k . Dopasowanie obu wykresów do rozkładu empirycznego można zaobserwować na wykresach histogramu oraz kwantylowych.

Rysunek 7: Histogram wartości środków trwałych w relacji do dochodów bieżących jednostek i zakładów budżetowych gmin i miast powiatowych pogrupowanych w powiaty, k , w latach 2010-2011 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami t-Studenta oraz normalnym



Źródło: Bank Danych Lokalnych GUS

4.1.8 Stopa deprecjacji infrastruktury

Najtrudniejszym do skalibrowania rozkładem, ze względu na brak odpowiednich danych, był rozkład parametru δ . W celu uzyskania rozkładu teoretycznego, poczyniono silne założenie, że wartości parametrów i (wydatków majątkowych w relacji do dochodów bieżących), k i γ są równe wartościom długookresowym z modelu o nieskończonym horyzoncie czasowym opisanym w części D aneksu. Wykorzystano także wyprowadzone w aneksie równanie (27): $\delta = \frac{i}{k} - \gamma$.

Rozkład parametru δ uzyskano, stosując podobną procedurę, co w wypadku parametrów: r , χ , b , γ , c , k . Do tego parametru dopasowano rozkład gamma (kształt: 2.218; skala: 9.709) oraz wartość bazową równą wartości medianowej 0,19. Następnie wylosowano 100 tysięcy trójek i , k i γ z rozkładów teoretycznych i każdej z trójek przypisano odpowiednią wartość δ , zgodnie z ww. wzorem (27). Medianą z tak uzyskanego rozkładu δ była liczba 0,059. Ponieważ parametr δ często przyjmował wartości ujemne, w celu dopasowania rozkładu gamma, który przypisuje zerowe prawdopodobieństwo liczbom ujemnym, każdą wartość δ powiększono o 0,15. Ostatecznie, rozkład δ stanowi rozkład gamma (kształt: 4,760; skala: 21,213) pomniejszony o wspomniane 0,15 - tak, aby wartości ujemne miały niezerowe prawdopodobieństwo wystąpienia.

4.2 Analiza struktury warunków ograniczających

Po skalibrowaniu rozkładów teoretycznych dla wszystkich parametrów modelu, z wyjątkiem α i β , wygenerowano 7200 symulacji modelu ograniczonego do lat 3-4 w celu zbadania struktur

warunków ograniczających (czyli zbadania, które warunki były luźne, a które napięte) w rozwiązaniach optymalnych. Wartości większości parametrów (tj. niebehawioralnych) losowano z rozkładów teoretycznych. W zakresie parametrów behawioralnych przyjęto na tym etapie podejście agnostyczne - losowano α z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1; 0, 9]$, zaś β - z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0; 1]$. W związku z tak dowolnym określeniem wartości parametrów behawioralnych, należy traktować owe symulacje jako wstępne.

Każdy z 200 zestawów wylosowanych parametrów zreplikowano 36-krotnie (stąd łączna liczba 7200) - tak, aby uzyskać wszystkie kombinacje: u_3 równe zero, równe limitowi lub równe innej kwocie pomiędzy ww. skrajnymi liczbami, i_3 równe zero lub liczbie dodatniej oraz te same opcje dla ww. zmiennych z roku czwartego (łącznie: $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ kombinacji). Następnie obliczono użyteczność dla każdego z 36 scenariuszy i wybrano ten o najwyższej użyteczności. Ostatecznie uzyskano wartości optymalne zmiennych decyzyjnych, optymalną strukturę warunków ograniczających i użyteczność dla 200 zestawów wylosowanych parametrów. Do tych wyników odnoszą się wszystkie zaprezentowane w tym podrozdziale statystyki opisowe.

Tabela 4: Częstość występowania różnych optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych

zmienna	częstość	zmienna	częstość	zmienna	częstość
$i_3^* = 0$	32,5%	$i_3^* > 0$	67,5%		
$u_3^* = 0$	32,5%	$0 < u_3^* < U_3$	19,5%	$u_3^* = U_3$	48%
$i_4^* = 0$	51,5%	$i_4^* > 0$	48,5%		
$u_4^* = 0$	5%	$0 < u_4^* < U_4$	23,5%	$u_4^* = U_4$	71,5%

Źródło: obliczenia własne

Z tabeli 4 wynika, że inwestycje unijne przeważnie powinny być realizowane na maksymalnym poziomie, natomiast inwestycje zwykłe - niespodziewanie często powinny być zerowe. Należy jednak mieć na uwadze, że wyniki te były podyktowane specyficznymi wartościami α bliskimi 0,9 i/lub β bliskimi 0, co wpływało na niską użyteczność z infrastruktury i w efekcie - zaniżanie inwestycji.

Tabela 5: Zestawy najpopularniejszych wartości optymalnych zmiennych decyzyjnych

poz.	u_3^*	i_3^*	u_4^*	i_4^*	częstość
1	= 0	> 0	= U_4	> 0	19,5%
2	= U_3	> 0	= U_4	> 0	17,5%
3	= U_3	> 0	= U_4	= 0	10,5%
4	= U_3	= 0	> 0	= 0	7%
5	> 0	= 0	= U_4	= 0	6,5%
6	= U_3	= 0	= U_4	= 0	5%
7	= 0	> 0	= U_4	= 0	4%
8	= 0	= 0	> 0	= 0	3%
9	> 0	= 0	> 0	= 0	3%
10	= U_3	> 0	> 0	= 0	3%

Źródło: obliczenia własne

Tabela 5 prezentuje 10 najpopularniejszych kombinacji optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych. Łącznie odpowiadają one za 79% przypadków. Warto wspomnieć, że drugi najczęściej występujący wariant (z niewielką stratą do najczęściej występującego) został rozwiązany w sposób analityczny w niniejszej pracy.

Warunek IWZ jest prawie zawsze napięty. W 3,5% przypadków dla roku trzeciego, luz w warunku wynosi między 0,07 a 0,0001. Wtedy α przyjmuje wysokie wartości, około 0,8. Mowa

tu jednak o implikacji, a nie równoważności, gdyż często dla wysokich α warunek IWZ także bywa napięty. W pozostałych przypadkach luz nie przekracza 0,0001, co jest w praktyce nieodróżnialne od zera. Warunek IWZ dla roku czwartego jest napięty zawsze. Z kolei warunek na zrównoważony wynik bieżący (ZWB) jest napięty rzadko. W trzecim roku zdarza się to w 9% przypadków, wówczas α jest wysoka, wydatki bieżące - wysokie, a inwestycje, zwłaszcza zwykle - niskie. ZWB w czwartym roku napięty jest w 6% przypadków, wtedy α jest bardzo wysoka, a inwestycje przeważnie zerowe. Podsumowując, założenie o napiętości IWZ i braku napiętości ZWB ma potwierdzenie w wynikach wstępnych symulacji.

W 19% przypadków odchylenie między wartościami użyteczności z rozwiązania numerycznego i analitycznego nie przekraczało 0,0001. Podobnie często, w 17% przypadków, optymalna wartość żadnej z sześciu zmiennych decyzyjnych (oprócz podanych w tabelach - dodatkowo c_3^* i c_4^*) nie odchyła się od optymalnej wartości uzyskanej w rozwiązaniu analitycznym o więcej niż 0,02 (jednostkę stanowią dochody bieżące samorządu z danego roku). W 14% przypadków odchylenie to nie przekracza 0,01. Odnotowane odstępstwa są przede wszystkim konsekwencją niespełnienia ograniczeń przyjętych jakodane w rozwiązaniu analitycznym dla dużego odsetka wariantów parametryzacji.

Jeżeli jednak założyć strukturę warunków ograniczających odpowiadającą strukturze rozwiązań analitycznych, czyli inwestycje unijne w trzecim i czwartym roku na maksymalnym poziomie oraz dodatnie inwestycje zwykle w obu tych latach (17,5% przypadków), to zbieżność rozwiązań uzyskanych metodami numeryczną i analityczną staje się dużo większa. W 86% odchylenie między użytecznościami z obu metod nie przekracza 0,0001. W 75% optymalna wartość żadnej z 6 zmiennych nie odchyła się o bardziej od optymalnej wartości uzyskanej w rozwiązaniu analitycznym niż 0,02, natomiast w 64% - o bardziej niż 0,01. Generalnie oznacza to dużą zbieżność wyników osiągniętych za pomocą obu metod. Odnotowane odstępstwa są konsekwencją niedoskonałości meta-algorytmu numerycznego, który nie odnajduje ekstremów globalnych, a jedynie ekstrema lokalne. Warto w tym miejscu podkreślić, że na meta-algorytm składają się niedoskonałe metody optymalizacji, których wyniki mogą być poprawne bądź nie w zależności od startowych wartości zmiennych (patrz części A i C.2 aneksu). Ta obserwacja pokazuje ponadto, jaka korzyść płynie z uzyskania rozwiązania analitycznego.

4.3 Kalibracja wartości parametrów behawioralnych α i β

Parametry: α , opisujący preferencje względem wydatków bieżących w porównaniu z infrastrukturą, i β , dyskontujący przyszłą użyteczność, różnią się od pozostałych parametrów modelu. Są one bowiem parametrami behawioralnymi, nieobserwowalnymi i dlatego nie można odczytać ich rozkładów empirycznych z danych. Teoretycznie każdy wójt, burmistrz czy prezydent mógłby ustalić dowolne wartości $\alpha \in (0, 1)$ oraz $\beta > 0$, a następnie uzyskać z modelu optymalne wartości wydatków bieżących i inwestycyjnych. W podrozdziale 5.1 ograniczono się jednak do takich α i β , zgodnie z którymi struktura warunków ograniczających w optimum jest taka jak założona w rozdziale 3, czyli przede wszystkim: w 3 i 4 roku wykorzystuje się całą dopuszczalną kwotę środków unijnych, napięta jest reguła IWZ oraz realizuje się niezerowe wydatki bieżące i inwestycyjne. Aby ograniczyć możliwość, że rozwiązanie uzyskane metodą KKT stanowi tylko ekstremum lokalne, a nie globalne, model rozwiązywano także za pomocą metod numerycznych. Jeżeli rozwiązania uzyskane za pomocą tych metod różniły się, tj. użyteczność mogła być wyższa przy innej strukturze warunków ograniczających niż założona, wówczas (α, β) prowadzące do takich rozwiązań były wyłączone ze zbioru rozważanych wartości.

Zadanie optymalizacyjne rozwiązano dla wszystkich możliwych par $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, gdzie $\alpha \in \{0, 1; 0, 2, \dots, 0, 9\}$, zaś $\beta \in \{0, 1; 0, 2; \dots; 1, 0\}$. Pozostałym parametrom przypisano natomiast wartości bazowe podane w poprzednim podrozdziale. Z iloczynu kartezjańskiego $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

wyodrębniono następnie podzbiór, który prowadził do rozwiązań optymalnych o strukturze ograniczeń zgodnej z założeniami (punkty 2, 3, 6 i 7 spośród wymienionych poniżej). Z owego podzbioru, jedynie wartości parametrów podane w punktach 6 i 7 prowadziły do rozwiązań optymalnych zbliżonych do empirycznych, tj. istotnie wyższych wydatków bieżących niż inwestycyjnych. Ostatecznie zatem zawężono poszukiwania do obszaru zaprezentowanego w tabelach 8 i 9 i wybrano domyślną wartość α równą 0,4 oraz β w wysokości 0,1. Wartości te wykorzystywano w symulacjach o z góry ustalonych wartościach α i β .

- 1) $\alpha = 0, 1, \beta \neq 0, 2 \Rightarrow u_3^* = 0 \Rightarrow$ zła struktura rozwiązania
- 2) $\alpha = 0, 1, \beta = 0, 2 \Rightarrow c_3^*, i_3^*, c_4^*, i_4^* > 0; u_3^* = U_3; u_4^* = U_4$
 \Rightarrow dobra struktura rozwiązania, nierealistyczne wyniki
- 3) $\alpha = 0, 2, \beta \in \{0, 1; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6\} \Rightarrow c_3^*, i_3^*, c_4^*, i_4^* > 0; u_3^* = U_3; u_4^* = U_4$
 \Rightarrow dobra struktura rozwiązania, nierealistyczne wyniki
- 4) $\alpha = 0, 2, \beta = 0, 2 \Rightarrow u_3^* < U_3 \Rightarrow$ zła struktura rozwiązania
- 5) $\alpha = 0, 2, \beta \in [0, 7, 1, 0] \Rightarrow u_3^* = 0 \Rightarrow$ zła struktura rozwiązania
- 6) $\alpha = 0, 3 \Rightarrow c_3^*, i_3^*, c_4^*, i_4^* > 0; u_3^* = U_3; u_4^* = U_4 \Rightarrow$ dobra struktura rozwiązania
- 7) $\alpha = 0, 4, \beta \in [0, 1, 0, 4] \Rightarrow c_3^*, i_3^*, c_4^*, i_4^* > 0; u_3^* = U_3^*; u_4^* = u_4^*; c_3^* > i_3^*; c_4^* > i_4^*$
 \Rightarrow dobra struktura rozwiązania, wyniki zbliżone do wartości występujących w danych
- 8) $\alpha = 0, 4, \beta \in [0, 5, 1] \Rightarrow i_4^* < 0$
 \Rightarrow jeden warunek niespełnony, brak interpretacji ekonomicznej
- 9) $\alpha \geq 0, 5 \Rightarrow i_4^* < 0 \Rightarrow$ jeden warunek niespełnony, brak interpretacji ekonomicznej

Rysunek 8: Rozwiązania optymalne dla trzeciego roku w zależności od α i β

c3 / y3		beta									
alfa		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,3		0,54	0,53	0,52	0,50	0,49	0,48	0,47	0,46	0,45	0,44
0,32		0,58	0,56	0,55	0,54	0,52	0,51	0,50	0,49	0,48	0,47
0,34		0,61	0,60	0,59	0,57	0,56	0,55	0,53	0,52	0,51	0,50
0,36		0,65	0,64	0,62	0,61	0,59	0,58	0,57	0,55	0,54	0,53
0,38		0,69	0,67	0,66	0,64	0,63	0,61	0,60	0,58	0,57	0,56
0,4		0,72	0,71	0,69	0,67	0,66	0,64	0,63	0,62	0,60	0,59
0,42		0,76	0,74	0,73	0,71						

i3 / y3		beta									
alfa		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,3		0,88	0,91	0,94	0,97	1,00	1,03	1,05	1,08	1,10	1,13
0,32		0,79	0,82	0,85	0,89	0,92	0,95	0,98	1,00	1,03	1,05
0,34		0,70	0,73	0,77	0,80	0,83	0,87	0,90	0,93	0,95	0,98
0,36		0,61	0,65	0,68	0,72	0,75	0,78	0,82	0,85	0,88	0,90
0,38		0,52	0,56	0,60	0,63	0,67	0,70	0,74	0,77	0,80	0,83
0,4		0,43	0,47	0,51	0,55	0,59	0,62	0,66	0,69	0,72	0,75
0,42		0,34	0,38	0,42	0,46						

Źródło: obliczenia własne

Rysunek 9: Rozwiązania optymalne dla czwartego roku w zależności od α i β

c4 / y4		beta									
alfa		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,3		0,66	0,67	0,67	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69
0,32		0,70	0,70	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73
0,34		0,73	0,74	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,77
0,36		0,76	0,77	0,77	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80
0,38		0,79	0,80	0,80	0,81	0,81	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83
0,4		0,82	0,83	0,83	0,84	0,84	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87
0,42		0,85	0,86	0,86	0,87						

i4 / y4		beta									
alfa		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,3		0,50	0,49	0,48	0,47	0,46	0,45	0,45	0,44	0,43	0,42
0,32		0,42	0,41	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,33
0,34		0,34	0,33	0,32	0,30	0,29	0,28	0,27	0,26	0,26	0,25
0,36		0,26	0,25	0,24	0,23	0,21	0,20	0,19	0,18	0,17	0,16
0,38		0,19	0,18	0,16	0,15	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08
0,4		0,12	0,11	0,09	0,08	0,06	0,05	0,04	0,02	0,01	0,00
0,42		0,06	0,04	0,03	0,01						

Źródło: obliczenia własne

Wartości α i β były ostatnimi niezbędnymi do numerycznego rozwiązania modelu. Wszystkie wartości domyślne oraz rozkłady służące do analizy wrażliwości zostały zawarte w tabeli 6.

Tabela 6: Rozkłady wartości parametrów modelu

parametr	domyśl.	rozkład do analizy wrażliwości	źródło
α	0.4	brak	własne
β	0.1	brak	własne
v	0.25	trójkątny (0,2; 0,25; 0,35)	BDL
θ	0,62	trójkątny (0,43; 0,62; 1)	Sierak
r	0,039	gamma (kształt: 6,417 ; skala: 152,5)	MF
χ	0,2	gamma (kształt: 2,325 ; skala: 9,608)	MF
γ	0,044	t-Studenta (położenie: 0,044; skala: 0,039; st. sw.: 2,919)	MF
δ	0,059	-0,15 + gamma(kształt: 4,760; skala: 21,213)	$\delta = \frac{i}{k} - \gamma$

Tabela 7: Rozkłady wartości startowych zmiennych modelu

zmienna	domyślnie	rozkład do analizy wrażliwości	źródło
b	0,32	0 (3,8%) lub gamma (kształt: 2,405; skala: 6,984)	MF
c	0,90	t-Studenta (położenie: 0,90; skala: 0,045; st. sw.: 4,52)	MF
k	2,06	t-Studenta (położenie: 2,06; skala: 0,36; st. sw.: 6,58)	BDL

Podsumowując rozdział siódmy, należy stwierdzić, że niektóre omawiane w nim wyniki nie były zgodne z oczekiwaniami. Niespodziewanie często, w symulacjach z losowymi wartościami parametru preferencji α i czynnika dyskontowego β , optymalny poziom inwestycji okazywał się zerowy. Ponieważ rozkładów nieobserwowalnych parametrów α i β nie da się oszacować na pod-

stawie danych empirycznych, można założyć takie ich wartości, które implikują optymalne wartości zmiennych decyzyjnych zbliżone do empirycznych. Co więcej, można przyjąć wartości, które implikują strukturę warunków ograniczających zgodną z założoną w rozwiązaniu analitycznym. Tak skalibrowana wartość β okazała się jednak na tyle niska, że oznacza niespotykaną w literaturze krótkowzroczność modelowanego decydenta.

Ostatecznie, w następnym rozdziale, wykorzystywano skalibrowane rozkłady parametrów strukturalnych i wartości startowych, zaprezentowane w tabelach 6 i 7. Z kolei w odniesieniu do parametrów behawioralnych, postępowano na dwa sposoby - losowano je z rozkładów jednostajnych („agnostycznych”) albo przyjmowano stałe wartości uzyskane w podrozdziale 4.3.

5 Rozwiązanie numeryczne modelu oraz analiza wrażliwości optymalnych poziomów wydatków bieżących i inwestycyjnych

Niniejszy rozdział przedstawia rozwiązanie numeryczne pełnej, czterookresowej wersji modelu oraz opisuje wpływ wartości parametrów strukturalnych i behawioralnych modelu na optymalne wartości zmiennych decyzyjnych: wydatków bieżących $\frac{C_t^*}{y_t}$ oraz inwestycyjnych zwykłych $\frac{i_t^*}{y_t}$. Koncepcja obu podrozdziałów jest taka sama: polega na wylosowaniu wielu zestawów wartości parametrów i znalezieniu dla każdego zestawu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych. Następnie oszacowano liniowe metamodele¹⁵ ekonometryczne, w których zmienną objaśnianą była jedna ze zmiennych decyzyjnych, z konkretnego roku, a objaśniającymi - wartości parametrów.

Należy zastrzec, że przyjęto liniową specyfikację modeli, mimo że w rzeczywistości efekty mogą być nieliniowe (a czasem wręcz niemonotoniczne), co widać w rozwiązaniach analitycznych modelu. Oszacowanie modeli liniowych pozwala znaleźć efekty przeciętne w całej przestrzeni parametrów (nie tylko lokalne wokół bazowych wartości parametrów), ale nie wychwyci nieliniowości. Przeanalizowanie pełnego wpływu ewentualnych zmian wartości wybranych parametrów w przypadku konkretnej gminy jest możliwe w oparciu o wykorzystywane tutaj narzędzia, ale wykracza poza zakres niniejszego opracowania.

Warto też zaznaczyć, iż zrezygnowano z podawania statystycznej istotności zmiennych objaśniających w modelach. Wynika to z faktu, że w praktyce możliwe jest wygenerowanie tak dużej liczby obserwacji, aby uczynić każdy parametr istotnym (wszak każdy parametr znajdował się w rozwiązaniu analitycznym). Dlatego w niniejszym rozdziale uwagę skupiono na sile i kierunku wpływu poszczególnych parametrów. W rezultacie, pod uwagę brano oszacowania standaryzowanych współczynników regresji (równych zwykłemu współczynnikom pomnożonym przez odchylenie standardowe danej zmiennej objaśniającej), a nie zwykłych współczynników. Łatwiej bowiem porównywać wpływ różnych parametrów, zakładając ich wzrost o jedno odchylenie standardowe, a nie o jednostkę.

Pierwszy podrozdział ogranicza się do modelu dwóch ostatnich lat kadencji władz samorządowych oraz do założonych wartości parametrów behawioralnych i struktury warunków ograniczających w rozwiązaniu optymalnym. Dzięki temu rozwiązanie metodą numeryczną mogło zostać sprawdzone za pomocą metody analitycznej. Drugi podrozdział nie zawiera powyższych ograniczeń. Dotyczy on pełnego modelu czteroletniego, nie zakłada ani określonych wartości parametrów behawioralnych, ani struktury warunków ograniczających. Jednak w tym przypadku rozwiązanie można uzyskać jedynie metodą numeryczną. W celach porównawczych, przeprowa-

¹⁵Przez metamodel rozumie się tu model, którego parametry estymowane są w oparciu o dane wygenerowane w procesie symulacji, a nie rzeczywiste dane empiryczne. Nie służy on więc weryfikacji zależności obserwowanych w danych, lecz wychwyceniu cech symulowanego procesu, trudnych do bezpośredniego dostrzeżenia ze względu na jego dużą złożoność.

dzono też symulacje w oparciu o model czteroletni o z góry ustalonych wartościach parametrów behawioralnych.

5.1 Wyniki analizy wrażliwości dla scenariusza rozwiązanego analitycznie z ustalonymi: strukturą warunków ograniczających oraz α i β

W celu wykonania analizy wrażliwości dla modelu dwuletniego, wylosowano 2247 zestawy wartości parametrów z rozkładów teoretycznych zaprezentowanych w tabeli 7, przyjmując wartość parametru preferencji $\alpha = 0,4$ i czynnika dyskontowego $\beta = 0,1$. Następnie pozostawiono dokładnie tysiąc zestawów, w których optymalne wartości zmiennych decyzyjnych były takie same według metody analitycznej (warunków KKT) oraz metody numerycznej (meta-alorytmu optymalizacyjnego). W kolejnym kroku, klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, oszacowano liniowe modele ekonometryczne w oparciu o tysiąc zestawów liczb. W modelach tych zmiennymi objaśniającymi były wartości parametrów strukturalnych, a objaśnianymi - optymalne wartości kolejno: $\frac{c_3^*}{y_3}, \frac{c_4^*}{y_4}, \frac{i_3^*}{y_3}, \frac{i_4^*}{y_4}$, czyli optymalnych wydatki bieżących albo optymalnych inwestycji zwykłych w relacji do dochodów bieżących w roku odpowiednio trzecim i czwartym.

Oszacowania standaryzowanych współczynników stojących przy zmiennych objaśniających ze wszystkich modeli zostały zebrane w tabeli 8.

Tabela 8: Oszacowania standaryzowanych współczynników modeli opisujących optymalne wartości zmiennych decyzyjnych dla modelu dwuletniego z określoną strukturą warunków ograniczających oraz α i β

	$\frac{c_3^*}{y_3}$	$\frac{c_4^*}{y_4}$	$\frac{i_3^*}{y_3}$	$\frac{i_4^*}{y_4}$
γ	-0,004	-0,015	0,044	0,099
δ	-0,026	-0,057	0,057	0,153
θ	0,000	-0,001	-0,034	-0,034
r	0,004	0,000	-0,091	-0,034
χ	0,045	0,039	-0,385	-0,152
b	-0,033	-0,016	-0,185	0,052
c	-0,022	0,002	-0,131	0,094
k	0,048	0,026	-0,102	-0,063
v	0,004	0,006	-0,030	-0,039
R^2	0,887	0,771	0,912	0,817

Źródło: obliczenia własne

Z wyżej przedstawionych modeli płynie wiele istotnych wniosków dla polityki gmin i miast powiatowych.

Wydatki bieżące w relacji do dochodów bieżących w pierwszym i drugim roku ($c = \frac{c_1}{y_1} = \frac{c_2}{y_2}$) wpływają: umiarkowanie negatywnie na $\frac{c_3^*}{y_3}$, nieznacznie na $\frac{c_4^*}{y_4}$, silnie negatywnie na $\frac{i_3^*}{y_3}$ oraz silnie pozytywnie na $\frac{i_4^*}{y_4}$. Najprawdopodobniej wyższe wydatki bieżące w przeszłości, poprzez małą przestrzeń w IWZ, ograniczają wydatki ogółem w 3 roku, ale oszczędności te mogą zostać, przynajmniej częściowo, wykorzystane na wzrost wydatków w 4 roku.

Dynamika dochodów bieżących (γ) wpływa ujemnie na wydatki bieżące $\frac{c_3^*}{y_3}$ oraz $\frac{c_4^*}{y_4}$, natomiast dodatnio - na wydatki inwestycyjne $\frac{i_3^*}{y_3}$ oraz $\frac{i_4^*}{y_4}$. Być może działa tu zasada zapobiegliwości. Ponadprzeciętnie wysoki wzrost dochodów należy przeznaczyć na inwestycje, które zwiększają użyteczność także w przyszłości, natomiast wydatki bieżące działają antycyklicznie, jako automatyczny stabilizator - w dobrych czasach rosną wolniej niż baza dochodowa, a w złych -

szybciej. Należy podkreślić, że zmienne objaśniane stanowią kategorie w relacji do dochodów bieżących, zatem szybsza dynamika dochodów w roku t , γ_t powinna pośrednio zwiększyć optymalne wartości liczników (c_t^* , i_t^*) oraz bezpośrednio - mianowników (y_t), więc końcowy efekt nie był oczywisty ex ante.

Zgodnie z rozwiązaniami analitycznymi (12) i (13), wpływ stopy procentowej r i poziomu zadłużenia b na obie kategorie wydatków optymalnych c_4^* i i_4^* jest ujemny. Wnioski z analizy wrażliwości są jednak nieco inne. Wpływ stopy procentowej r na $\frac{c_4^*}{y_4}$ jest neutralny, a długu b na $\frac{i_4^*}{y_4}$ - dodatni. Tę ostatnią, nieoczekiwaną zależność można wytłumaczyć tym, że początkowy stan zadłużenia b ujemnie oddziałuje na c_3^* oraz i_3^* , co obniża poziom długu b_4 i stwarza przestrzeń na inwestycje w ostatnim roku i_4^* . Poza tym, w rozwiązaniu analitycznym uwzględniony jest wpływ $\frac{b_4}{y_4+U_4} \approx \frac{b_4}{y_4} \approx b$, zaś w metamodelach opisywanych w niniejszym podrozdziale - $\frac{b_3}{y_3}$.

Jako zastanawiający należy ocenić również wpływ stopy zapadalności długu χ . Jest on dodatni w odniesieniu do wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$, a ujemny - do inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$. Biorąc pod uwagę IWZ, wydawać by się mogło, że wyższa stopa zapadalności χ powoduje wyższe koszty obsługi długu (lewa strona nierówności (2)), więc wymaga większej przestrzeni fiskalnej (prawa strona), którą mogą zapewnić niższe wydatki bieżące. Widocznie mechanizm wpływu parametru χ jest jednak bardziej złożony. Wyższa stopa zapadalności długu implikuje niższe wydatki ogółem (potwierdzają to wielokrotnie większe co do modułu oszacowania w modelach opisujących inwestycje niż wydatki bieżące), aby maksymalnie zredukować deficyt, a w konsekwencji dług i dzięki temu ograniczyć w przyszłych latach wydatki na spłatę długu, które z perspektywy funkcji użyteczności są czystą stratą. Krótko mówiąc, wysoka stopa zapadalności długu premiuje niskie zadłużenie. Efekt ten zadziałałby niezależnie od obowiązywania IWZ. Z kolei niski poziom długu wpływa na zmniejszenie wielkości lewej strony nierówności w regule fiskalnej, co pozwala na odpowiedni wzrost wydatków bieżących do momentu spełnienia reguły.

Poziom infrastruktury $k = \frac{k_3}{y_3}$ i limit dochodów unijnych v oddziałują dodatnio na wydatki bieżące $\frac{c_t^*}{y_t}$ oraz ujemnie na inwestycyjne $\frac{i_t^*}{y_t}$. Ta konkluzja wysnuta z rozwiązania analitycznego została potwierdzona przez oszacowania metamodeli. Zgadza się ona także z intuicją - potrzeba mniej inwestycji zwykłych i , jeżeli infrastruktura k jest już rozwinięta lub jeżeli można uzyskać większe finansowanie ze środków unijnych v . Zgodny z oczekiwaniami jest również wpływ wysokości stopy deprecjacji infrastruktury δ . Im jest ona większa, tym należy więcej inwestować, aby odbudować poziom infrastruktury k_t , a przez to - trzeba realizować niższe wydatki bieżące c_t^* . Z kolei konieczność ponoszenia większego wkładu własnego w finansowanie inwestycji unijnych θ implikuje niższe kwoty inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$, ale nie ma wpływu na kwoty wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$.

Ostatnią wartą rozważenia kwestią jest siła wpływu poszczególnych parametrów na wartości zmiennych decyzyjnych, tzn. na który parametr szczególną uwagę powinni zwrócić decydenci.

Na inwestycje zwykle $\frac{i_t^*}{y_t}$, szczególnie w 3 roku, najsilniej oddziałuje stopa zapadalności długu χ . W 3 roku dużą rolę odgrywają także startowe wartości zadłużenia b i wydatków bieżących c , które mają, zgodnie z intuicją, mniejsze znaczenie w kontekście roku 4. W ostatnim roku znaczenia nabiera natomiast stopa deprecjacji infrastruktury δ .

W odniesieniu do wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$, miary przeciętnego wpływu są co do modułu niższe i mniej zróżnicowane. Największe znaczenie ma również stopa zapadalności długu χ . Podobnie jak w przypadku inwestycji, w trzecim (lecz nie czwartym) roku istotną rolę odgrywały wartości startowe parametrów: b , c i k . Natomiast w czwartym roku stosunkowo silny wpływ wywarła stopa deprecjacji infrastruktury δ .

Parametry związane z inwestycjami unijnymi (θ i v) mają bardzo małe znaczenie w przypadku

wszystkich czterech zmiennych objaśnianych. Nie dziwi to, gdyż w założonej strukturze warunków ograniczających, inwestycje unijne opiewają na maksymalną kwotę $u_3^* = U_3$ i $u_4^* = U_4$.

5.2 Rozwiązanie numeryczne pełnego modelu oraz wyniki analizy wrażliwości

Z analizy przeprowadzonej w podrozdziale 4.2 wynikało, że struktura warunków ograniczających przyjęta w rozwiązaniu analitycznym i założona w podrozdziale 5.1 niekoniecznie musi być optymalna - będzie tak tylko przy pewnych, dość szczególnych założeniach co do wartości parametru preferencji α i czynnika dyskontowego β . Dlatego w niniejszej części pracy zrezygnowano z narzucania struktury warunków ograniczających oraz przyjmowania określonych wartości α i β . Takie podejście ma swoją cenę - niemożność zweryfikowania wyników metody numerycznej za pomocą metody analitycznej.

Przy założeniu domyślnych wartości parametrów, tj. zamieszczonych w tabeli 6 i 7, optymalne wartości zmiennych decyzyjnych są następujące:

Tabela 9: Optymalne wartości zmiennych decyzyjnych w modelu czteroletnim, dla domyślnych wartości parametrów

rok	c^*	u^*	i^*
1	0,71	0,25	0,46
2	0,80	0,26	0,26
3	0,71	0,25	0,50
4	0,83	0,16	0,14

Źródło: obliczenia własne

W trzech pierwszych latach inwestycje unijne kształtują się na poziomie bliskim limitowi $u_t^* \approx U_t$. Można również zauważyć, że na przemian występują lata z wyższymi i niższymi inwestycjami zwykłymi i_t^* . W ostatnim roku inwestycje są najniższe - dlatego, że mają wpływ na użyteczność czerpaną z infrastruktury k_t tylko w jednym roku, a nie rozkładają się na odpowiednio dłuższy okres, jak w przypadku inwestycji z lat poprzednich.

W celu oszacowania wpływu parametrów strukturalnych i behawioralnych na wartości optymalne zmiennych decyzyjnych w latach 1-4, wylosowano tysiąc zestawów parametrów strukturalnych i, w przeciwieństwie do poprzedniego podrozdziału, także behawioralnych: α z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1; 0, 9]$ i β z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1]$. Następnie oszacowano klasyczną metodą najmniejszych kwadratów osiem metamodeli ekonometrycznych - dla zmiennych objaśnianych: $\frac{c_t^*}{y_t}$ oraz $\frac{i_t^*}{y_t}$, gdzie $t \in \{1, 2, 3, 4\}$. Oszacowania współczynników stojących przy zmiennych objaśniających ze wszystkich modeli zostały zebrane w tabeli 10.

Z modeli objaśniających optymalne wartości wydatków bieżących w kolejnych czterech latach kadencji władz samorządowych $\frac{c_t^*}{y_t}$ można wyciągnąć następujące wnioski.

Zmienne objaśniane zależą dodatnio od parametru preferencji α , co było do przewidzenia na podstawie samej definicji tego parametru. Parametr ten cechuje ponadto największa siła wpływu. Równie oczywista jest zaobserwowana dodatnia zależność między startowym poziomem infrastruktury k a poziomem wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$ - bogata infrastruktura nie wymaga wysokich nakładów inwestycyjnych. Odwrotnie przedstawia się sytuacja w związku ze stopą deprecjacji infrastruktury δ - im wyższa, tym potrzeba większych inwestycji (odtworzeniowych), co ogranicza fundusze na $\frac{c_t^*}{y_t}$.

Zgodnie z oczekiwaniami, wyższy dług b i stopa procentowa r prowadziły przeważnie do zmniejszenia $\frac{c_t^*}{y_t}$. To samo dotyczyło stopy zapadalności długu χ , co stanowi odwrotną obserwację niż w poprzednim podrozdziale. Warto jednak zaznaczyć, że wpływ χ był zasadniczo słaby.

Tabela 10: Oszacowania standaryzowanych współczynników metamodeli opisujących optymalne wartości zmiennych decyzyjnych dla modelu czteroletniego z endogeniczną strukturą warunków ograniczających oraz losowymi α i β

	$\frac{c_1^*}{y_1}$	$\frac{c_2^*}{y_2}$	$\frac{c_3^*}{y_3}$	$\frac{c_4^*}{y_4}$	$\frac{i_1^*}{y_1}$	$\frac{i_2^*}{y_2}$	$\frac{i_3^*}{y_3}$	$\frac{i_4^*}{y_4}$
α	0,230	0,154	0,115	0,137	-0,648	-0,336	-0,165	-0,026
β	-0,036	-0,028	0,011	0,055	0,008	0,073	0,014	-0,047
γ	-0,008	0,000	0,010	0,001	0,108	0,081	0,044	0,020
δ	-0,005	-0,015	-0,017	-0,020	0,050	0,037	0,038	0,030
θ	-0,003	-0,007	-0,009	-0,007	-0,005	-0,010	0,004	-0,008
r	-0,005	-0,013	-0,014	-0,010	-0,094	-0,023	-0,005	-0,009
χ	-0,014	-0,006	-0,006	-0,001	-0,397	-0,104	-0,053	-0,036
b	-0,060	-0,014	-0,003	-0,027	-0,079	0,009	0,013	-0,007
c	-0,026	0,022	0,021	-0,009	-0,077	0,029	0,016	-0,002
k	0,032	0,017	0,012	0,023	-0,086	-0,031	-0,014	-0,011
v	0,003	0,006	0,006	0,000	-0,021	-0,035	-0,029	-0,009
R^2	0,873	0,713	0,508	0,540	0,605	0,540	0,222	0,067

Źródło: obliczenia własne

Czynnik dyskontowy β z kolei wpływa na $\frac{c_t^*}{y_t}$ ujemnie w dwóch pierwszych latach, następnie zależność ta staje się dodatnia. Jest to najbardziej wpływowy parametr, po parametrze preferencji α , w odniesieniu do wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$. Im większa wielkość β , tym decydenta cechuje większa dalekowzroczność. W pierwszym i drugim roku, dalekowzroczny decydent może wpłynąć na użyteczność z przyszłych lat jedynie za pomocą inwestycji i_1^* i i_2^* , a więc zwiększa je, co wypiera aktualne wydatki bieżące c_1^* i c_2^* . W ostatnim roku β nie różnicuje już stosunku do c_4^* i i_4^* , gdyż inwestycje i_4^* mogą wpłynąć na poziom infrastruktury k_5 , czyli tylko z jednego roku wchodzącego w zakres funkcji użyteczności. Pod tym względem inwestycje z 4 roku i_4^* przypominają wydatki bieżące c_t^* z każdego roku.

Oszacowanie stojące przy parametrze c także zmienia znak - z ujemnego na dodatni, a w czwartym roku wynosi prawie zero. Najpierw wyższe wydatki bieżące c poniesione w latach poprzedzających modelowaną kadencję zacieśniają przestrzeń fiskalną, czyli wymuszają oszczędności, które w późniejszych latach można wykorzystać na zwiększone wydatki bieżące $\frac{c_t^*}{y_t}$. Podobna obserwacja została zresztą poczyniona także w poprzednim podrozdziale.

W odniesieniu do dynamiki dochodów bieżących γ , wpływ tej zmiennej na $\frac{c_t^*}{y_t}$ okazał się być bardzo niewielki, co trochę osłabia obserwacje poczynione w poprzednim podrozdziale (acykliczność zamiast antycykliczności w odniesieniu do $\frac{c_t^*}{y_t}$)

Ponownie parametry dotyczące inwestycji unijnych: θ i v uzyskały oszacowania niewiele odbiegające od zera. Oszacowania parametrów w przypadku v były zawsze ujemne, co można wytłumaczyć efektem substytucji - większe wydatki na inwestycje unijne u_t^* są rekompensowane spadkiem kwot przeznaczanych na inwestycje zwykłe i_t^* .

Część obserwacji poczynionych w oparciu o oszacowania modeli opisujących inwestycje zwykłe $\frac{i_t^*}{y_t}$ pokrywa się z obserwacjami odnoszącymi się do modeli wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$. Parametr preferencji α wpływa ujemnie na wielkość zmiennych objaśnianych, gdyż bezpośrednio premiuje wydatki bieżące $\frac{c_t^*}{y_t}$, zwiększane kosztem inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$.

Wysokość stopy deprecjacji δ wywiera dodatni wpływ na poziom inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$, ponieważ szybsza deprecjacja wymaga zwiększonych nakładów inwestycyjnych na odtworzenie infrastruktury. Zgodnie z oczekiwaniami, wystąpiło również ujemne oddziaływanie stopy procentowej r i stopy zapadalności długu χ na inwestycje $\frac{i_t^*}{y_t}$. Zwiększone wydatki związane z długiem powodują bo-

wiem zawężenie przestrzeni finansowej. Warto zauważyć, że χ jest drugim w kolejności najbardziej wpływowym parametrem w odniesieniu do inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$.

Trzy parametry: k , b i c dotyczą wartości startowych modelu. W związku z tym ich wpływ na zmienne objaśniane maleje w czasie. Początkowy poziom infrastruktury k wpływa ujemnie na inwestycje $\frac{i_t^*}{y_t}$. Wartość zadłużenia b również wpływa na spadek inwestycji, ale już jedynie w pierwszym i czwartym roku. Wpływ wydatków bieżących w okresie przed modelowaną kadencją c kształtuje się podobnie jak b .

Zależności związane z dwoma parametrami: γ i β zasługują na szczególną uwagę. Po pierwsze, oszacowania przy dynamice dochodów bieżących γ okazały się dość wysokie (trzeci najbardziej wpływowy parametr w modelach opisujących inwestycje) i dodatnie. Oznacza to, że poziom inwestycji i_t^* powinien rosnać szybciej niż dochody bieżące y_t , co potwierdza zaobserwowany już efekt zapobiegliwości. Z kolei β wpływa na dodatnio, z wyjątkiem ostatniego roku, na wysokość inwestycji, co zostało już objaśnione wcześniej w niniejszym podrozdziale na przykładzie dalekowzrocznego decydenta.

Poniżej zaprezentowano oszacowania z modeli opartych na tysiącu zestawów wylosowanych parametrów strukturalnych, przy założeniu, że $\alpha = 0,4$, a $\beta = 0,1$ (co, należy podkreślić, jest bardzo niską wartością w porównaniu do występujących zwykle w literaturze). Z jednej strony, określenie stałych wartości parametrów behawioralnych mogło przyczynić się do zawężenia analizy do bardziej realistycznych, wiarygodnych scenariuszy. Z drugiej strony, taka analiza mogła pominąć część istotnych przypadków. Liczby z tabeli 11 mogą zatem posłużyć do oceny wrażliwości wyników analizy na poczynione założenia odnośnie do α i β .

Tabela 11: Oszacowania standaryzowanych współczynników modeli opisujących optymalne wartości zmiennych decyzyjnych dla modelu czteroletniego z endogeniczną strukturą warunków ograniczających oraz ustalonymi $\alpha = 0,4$ i $\beta = 0,1$

	$\frac{c_1^*}{y_1}$	$\frac{c_2^*}{y_2}$	$\frac{c_3^*}{y_3}$	$\frac{c_4^*}{y_4}$	$\frac{i_1^*}{y_1}$	$\frac{i_2^*}{y_2}$	$\frac{i_3^*}{y_3}$	$\frac{i_4^*}{y_4}$
γ	-0,009	0,012	0,036	0,017	0,025	0,032	-0,017	-0,026
δ	-0,023	-0,013	-0,007	-0,023	0,011	0,039	0,012	0,010
θ	-0,007	-0,012	-0,010	-0,017	0,015	-0,004	-0,004	0,013
r	0,002	-0,008	-0,007	-0,011	-0,016	-0,020	-0,014	-0,014
χ	0,028	-0,010	-0,004	0,012	-0,009	-0,060	-0,035	-0,008
b	-0,064	-0,012	0,005	-0,022	-0,018	0,030	-0,010	-0,017
c	-0,031	0,029	0,033	-0,016	-0,012	0,023	0,007	-0,011
k	0,045	0,004	0,010	0,028	-0,005	-0,010	-0,009	-0,004
v	0,001	-0,011	-0,021	-0,008	-0,010	0,001	0,016	-0,004
R^2	0,731	0,178	0,188	0,161	0,019	0,136	0,037	0,022

Źródło: obliczenia własne

Z tabeli 11 wynika, iż zawężenie się do domyślnych wartości parametrów behawioralnych może skutkować innymi wnioskami formułowanymi w odniesieniu do parametrów strukturalnych. Warto zauważyć, że w dwóch ostatnich latach inwestycje i_t^* nie rosą szybciej niż dochody bieżące y_t . Można domniemywać, że bardzo niski poziom β spowodował, że szczególnie na koniec kadencji inwestycje i_t^* nie odgrywają istotnego znaczenia. Szybsza dynamika dochodów γ zwiększa zatem wydatki bieżące c_t^* . Osłabił także dodatni wpływ poziomu infrastruktury k na $\frac{c_t^*}{y_t}$. Ponownie niewielką rolę odgrywają parametry związane z finansowaniem inwestycji unijnych θ i v .

Siły wpływu poszczególnych parametrów w modelach pozbawionych α i β wśród regresorów charakteryzują się mniejszym różnicowaniem. W przypadku wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$ nieznacz-

nie największy wpływ wywierają wartości startowe: b , c i k . W odniesieniu zaś do inwestycji zwykłych $\frac{i_t^*}{y_t}$, zróżnicowanie jest nieco większe, ale niższe w porównaniu z modelem o zmiennych wartościach parametrów behawioralnych. Najbardziej wpływowe parametry to χ i γ .

Podsumowanie

W pracy postawiono hipotezę, że optymalna polityka finansowa gmin i miast powiatowych uwzględnia wiele czynników:

- (a) Dodatni wpływ na optymalny poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: wskaźnika wartości infrastruktury oraz limitu dofinansowania unijnego.
- (b) Ujemny wpływ na optymalny poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: czynnika dyskontowego, współczynnika deprecjacji infrastruktury, udziału dochodów własnych w inwestycjach unijnych, stopy procentowej, stopy zapadalności długu, wskaźnika zadłużenia oraz wskaźnika wydatków bieżących z lat poprzednich.
- (c) Dodatni wpływ na optymalny poziom zwykłych (tj. nie współfinansowanych ze środków UE) wydatków inwestycyjnych w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: czynnika dyskontowego, współczynnika deprecjacji infrastruktury oraz udziału dochodów własnych w inwestycjach unijnych.
- (d) Ujemny wpływ na optymalny poziom zwykłych wydatków inwestycyjnych w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: stopy procentowej, stopy zapadalności długu, wskaźnika zadłużenia, wskaźnika wydatków bieżących z lat poprzednich, wskaźnika wartości infrastruktury oraz limitu dofinansowania unijnego.

Potwierdzono hipotezę (2a) w zakresie tego, że większa wartość infrastruktury powoduje zwiększenie wydatków bieżących (gdyż inwestycje stają się wówczas mniej potrzebne). Nie można było natomiast potwierdzić takiej hipotezy w odniesieniu do maksymalnego limitu środków unijnych.

Odnośnie do hipotezy (2b) pokazano, iż wzrost: stopy deprecjacji infrastruktury, zadłużenia w relacji do dochodów bieżących i, w mniejszym stopniu, udziału współfinansowania inwestycji unijnych wpływa negatywnie na poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących. Oddziaływanie stopy procentowej zaś okazało się być, w zależności od modelu, ujemne lub neutralne. Zwiększenie czynnika dyskontowego wywiera różny efekt na wydatki bieżące w zależności od okresu. Na początku, im bardziej dalekowzroczny decydent, tym bardziej troszczy się o użyteczność z przyszłości, a może ją poprawić w bieżącym momencie tylko za pomocą inwestycji, które ograniczają przestrzeń na wydatki bieżące. W ostatnim roku modelowanego okresu, użyteczność z infrastruktury wliczana jest do użyteczności tylko raz, podobnie jak wydatki bieżące, dlatego inwestycje przestają być tak istotne.

Nie można uogólnić obserwacji na temat oddziaływania wzrostu stopy zapadalności długu, gdyż w zależności od przyjętych założeń i roku kadencji, wpływ tego parametru może być dodatni, ujemny lub zerowy. To samo dotyczy dynamiki dochodów bieżących (przy czym tutaj trudno było postawić hipotezę na temat wpływu tej zmiennej z uwagi na jednoczesne oddziaływanie jej na licznik i mianownik zmiennej objaśnianej). Zasadniczo ten ostatni parametr nie ma silnego wpływu na optymalne wartości zmiennych decyzyjnych. Nieoczekiwany efekt zaobserwowano w odniesieniu do wskaźnika wydatków bieżących poniesionych w okresie poprzedzającym modelowany zakres czasowy kadencji. Wyższe przeszłe wydatki ograniczają przestrzeń na wydatki na początku badanego okresu, ale w kolejnym roku następuje efekt kompensacji, tj. uprzednie oszczędności umożliwiają większe wydatki w porównaniu ze scenariuszem bez oszczędności.

Stwierdzono także, że zgodnie z hipotezą (2c), dodatni wpływ na inwestycje zwykłe w relacji do dochodów bieżących ma wzrost stopy deprecjacji infrastruktury oraz czynnika dyskontowego (z wyjątkiem ostatniego roku). Wpływ parametru współfinansowania inwestycji unijnych jest zaś w przybliżeniu neutralny.

Potwierdzona została też hipoteza (2d) w zakresie ujemnego wpływu na inwestycje zwykłe w relacji do dochodów bieżących wzrostu: stopy procentowej, stopy zapadalności zadłużenia i wskaźnika infrastruktury. Pozytywnie zweryfikowano też hipotezę o ujemnym wpływie wzrostu limitu dochodów unijnych.

W przypadku wskaźnika zadłużenia można ponownie doszukać się efektu kompensacji. Ujemny wpływ występuje na początku okresu (w trzecim roku w modelu dwuletnim oraz w pierwszym roku w modelu czteroletnim), następnie wpływ staje się dodatni, a w przypadku modelu czteroletniego - na koniec okresu - ponownie ujemny, ale bliski neutralnemu. Efekt kompensacji, podobny jak opisany powyżej, dla wskaźnika wydatków bieżących z lat przeszłych jako zmiennej objaśniającej i optymalnych inwestycji zwykłych w roli zmiennej objaśnianej okazał się silniejszy niż w przypadku optymalnych wydatków bieżących w roli zmiennej objaśnianej. Po początkowym ujemnym oddziaływaniu na wielkość inwestycji zwykłych, następowało silne odbicie.

Wyższa dynamika dochodów bieżących wpływa generalnie na wzrost wskaźnika inwestycji, przy czym zależność ta jest silniejsza na początku okresu, co wynika z tzw. efektu zapobiegliwości. Optymalny poziom wydatków inwestycyjnych w relacji do dochodów bieżących w czasie co do zasady maleje, co jest konsekwencją przyjętej funkcji użyteczności, która premiuje inwestycje poczynione we wcześniejszym okresie, gdyż poprawiona w ten sposób infrastruktura jest uwzględniana wielokrotnie w użyteczności.

Uwagi końcowe i wnioski

Na zakończenie niniejszej pracy, w poniższych akapitach wskazano możliwe kierunki rozbudowy wykorzystywanego tu modelu oraz sformułowano refleksje na temat jego stosowania przez decydentów.

Po pierwsze, można by dokonać dalszej dezagregacji wydatków i dochodów w modelu opisującym politykę finansową samorządów. Warto tu zaznaczyć, że część zadań JST stanowią zadania zlecone - finansowane z dotacji i subwencji. W takim rozbudowanym modelu kwoty przeznaczone na owe zadania powinny być zatem kształtowane egzogenicznie. Model można by również rozszerzyć o równanie opisujące wpływ inwestycji na poziom infrastruktury. Uwzględniając to, że wielu spośród prezydentów i burmistrzów miast, a także wójtów gmin jest wybieranych na kolejne kadencje, należałoby również rozważyć wydłużenie horyzontu decyzyjnego do np. 8 lub 12 lat, a nawet – celem uzyskania interesującego punktu odniesienia – do nieskończoności.

Wyniki symulacji wykonywanych w oparciu o model warto byłoby także zweryfikować empirycznie. Należałoby dokonać oceny, jak często implikowana przez ten model optymalna polityka jest faktycznie prowadzona, oraz czy rzeczywiście sprzyja ona reelekcji władz.

Mysłąc o możliwości wykorzystania wniosków ze sformułowanych w niniejszej pracy modeli w praktyce, należy mieć na uwadze, iż niektóre założenia modelowe mogą w mniejszym lub większym stopniu odbiegać od rzeczywistości. Decydenci nie powinni więc korzystać z modelu lub posiłkować się implikacjami z niego wypływającymi bezkrytycznie. Jednak już samo sformułowanie problemu decyzyjnego z uwzględnieniem zmiennych decyzyjnych, warunków ograniczających i funkcji celu – tak, jak to uczyniono w niniejszej pracy – mogłoby wnieść wartość dodaną do procesu formułowania polityk publicznych. Zachęcałoby bowiem do przemyślanego określenia prognozowanych na kilka lat wprzód limitów wydatkowych na szczeblu samorządowym, wynikającym z reguł fiskalnych. To, w połączeniu z planowanymi wydatkami „sztywnymi”, wyznaczyłoby przestrzeń na ewentualne nowe wydatki publiczne. Każda propozycja zmian generujących nowe wydatki w budżecie samorządowym, musiałaby wtedy zostać zestawiona z ową przestrzenią finansową, co pozwoliłoby na korzystną zmianę w debacie publicznej. Wyborcy i decydenci nabraliby większej świadomości ograniczeń finansowych, przez co ich wybór stałby się bardziej racjonalny.

Literatura

- Bernoulli, D. (1954): “Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 22(1), 23–36.
- Besley, T. i S. Coate (2003): “Centralized Versus Decentralized Provision of Local Public Goods: A Political Economy Approach,” *Journal of Public Economics*, 87, 2611–2637.
- Bewley, T. F. (1981): “A Critique of Tiebout’s Theory of Local Public Expenditures,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 49(3), 713–740.
- Birgin, E. G., J. M. Martínez i M. Raydan (2001): “Algorithm 813: SPG—Software for Convex-Constrained Optimization,” *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 27, 340–349.
- (2014): “Spectral Projected Gradient Methods: Review and Perspectives,” *J. Stat. Softw.*, 60, 539–559.
- Bitner, M. (2014): “Granice długu JST,” Fragment wykładu dr. Michała Bitnera w ramach Samorządowej Akademii Finansów.
- Brennan, G. i J. M. Buchanan (1980): *The Power to Tax: Analytic Foundations of a Fiscal Constitution*, Cambridge University Press.
- Byrd, R. H., P. Lu, J. Nocedal i C. Zhu (1995): “A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16, 1190–1208.
- Chiang, A. (1994): “Podstawy Ekonomii Matematycznej”, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Chong, E. K. i S. H. Żak (2001): “An Introduction to Optimization”, John Wiley and Sons.
- Clarke, E. (1971): “Multipart Pricing of Public Goods,” *Public Choice*, 11, 17–33.
- CRAN - pakiet dfoptim: <https://CRAN.R-project.org/package=dfoptim>, dostęp: 3.03.2017.
- Davidon, W. (1959): “AEC Research and Development Report,” *ANL-5990*.
- Dennis, J. E. i R. B. Schnabel (1989): “Chapter IA View of Unconstrained optimization,” *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 1, 1–72.
- Dennis Jr, J. i H. Mei (1979): “Two New Unconstrained Optimization Algorithms which Use Function and Gradient Values,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, 28, 453–482.
- Falkowski, J. i G. Bukowska (2016): “Monopolizacja władzy a wyniki gospodarcze na poziomie Polski lokalnej,” *Gospodarka Narodowa*, 2, 91–120.
- Fletcher, R. (1970): “A New Approach to Variable Metric Algorithms,” *The Computer Journal*, 13, 317–322.
- Fletcher, R. i M. J. Powell (1963): “A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization,” *The Computer Journal*, 6, 163–168.
- Fletcher, R. i C. M. Reeves (1964): “Function Minimization by Conjugate Gradients,” *The Computer Journal*, 7, 149–154.
- Gay, D. M. (1990): “Usage Summary for Selected Optimization Routines,” *Computing Science Technical Report*, 153, 1–21.

- Gonet, W. (2004): "Ocena zdolności kredytowej samorządów," *Bank i Kredyt*, 7, 76–87.
- Goodspeed, T. J. (2002): "Bailouts in a Federation," *International Tax and Public Finance*, 9, 409–421.
- Groves, T. (1973): "Incentives in Teams," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 41(4), 617–31.
- Guziejewska, B. (2007): "Subwencje i dotacje dla samorządu terytorialnego w polityce finansowej państwa," *Gospodarka Narodowa*, 4, 71–89.
- (2008): "Efektywność finansów samorządu terytorialnego," *Gospodarka Narodowa*, 5-6, 71–89.
- Head, J. D. i M. C. Zerner (1985): "A Broyden—Fletcher—Goldfarb—Shanno Optimization Procedure for Molecular Geometries," *Chemical Physics Letters*, 122, 264–270.
- Hooke, R. i T. A. Jeeves (1961): "»Direct Search« Solution of Numerical and Statistical Problems," *Journal of the ACM (JACM)*, 8, 212–229.
- Inman, R. P. (2003): "Transfers and Bailouts: Enforcing Local Fiscal Discipline with Lessons from US Federalism," *Fiscal Decentralization and the Challenge of Hard Budget Constraints*, 35, 45–47.
- Jastrzębska, M. (2002): "Polityka długu jednostki samorządu terytorialnego," *Bank i Kredyt*, 9, 24–35.
- Kamiński, A. (2012): *Finansowanie dłużne w jednostkach samorządu terytorialnego*, Wolters Kluwer.
- Karpiński, P. (2001): "Gminy na rynku usług bankowych-tendencje i oczekiwania," *Bank i Kredyt*, 1–2, 69–77.
- Kelley, C. T. (1999): *Iterative Methods for Optimization*, SIAM.
- Kornai, J. (1979): "Resource-Constrained versus Demand-Constrained Systems," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 47(4), 801–819.
- (1980): *Economics of Shortage*, vol. 2, North Holland.
- Krzyżanowski, P. i L. Plaskota (2014): "Matematyka Obliczeniowa II," <http://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/mo2/wyklad.pdf>, dostęp: 2017-10-01.
- Levaggi, R. (2002): "Decentralized Budgeting Procedures for Public Expenditure," *Public Finance Review*, 30, 273–295.
- Lockwood, B. (2002): "Distributive Politics and the Costs of Centralization," *The Review of Economic Studies*, 69, 313–337.
- Moré, J. J. (1978): "The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory," w: *Numerical Analysis*, Springer, 105–116.
- Nash, J. C. (1979): "Compact Numerical Methods for Computers: Linear Algebra and Function Minimisation," Bristol: Adam Hilger.
- (2014): "On Best Practice Optimization Methods in R," *Journal of Statistical Software*, 60, 1–14.

- Nash, J. C., R. Varadhan i in. (2011): "Unifying Optimization Algorithms to Aid Software System Users: optimx for R," *Journal of Statistical Software*, 43, 1–14.
- Nelder, J. A. i R. Mead (1965): "A Simplex Method for Function Minimization," *The Computer Journal*, 7, 308–313.
- Nielsen, H. B. (2000): "Ucminf - an Algorithm for Unconstrained, Nonlinear Optimization," Tech. rep., Informatics and Mathematical Modelling (IMM), Technical University of Denmark.
- Oates, W. E. (2005): "Toward a Second-Generation Theory of Fiscal Federalism," *International Tax and Public Finance*, 12, 349–373.
- Olson, M. (1969): "The Principle of 'Fiscal Equivalence': the Division of Responsibilities among Different Levels of Government," *American Economic Review*, 59, 479–487.
- Palczewski, J. (2014): "Matematyka Stosowana. Optymalizacja II," <http://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/op2/wyklad.pdf>, dostęp: 2017-10-01.
- Pigou, A. C. (1932): "The Economics of Welfare, 1920," *McMillan&Co., London*.
- Polska Agencja Prasowa i Narodowy Bank Polski (2015): "Samorządowa Akademia Finansów III edycja. Program Edukacji Ekonomicznej," http://samorzad.pap.pl/depesze/Kategorieredakcyjne_BibliotekaSAF/153012/Tepe-narzedzie--Debata-o-przyszlosci-indywidualnego-wskaznika-zadluzenia-, dostęp: 2017-10-01.
- Portal Samorządowy (2016): "Indywidualny wskaźnik zadłużenia - JST liczą, że Ministerstwo Rozwoju zgodzi się na zmianę," <http://www.portalsamorzadowy.pl/prawo-i-finanse/indywidualny-wskaznika-zadluzenia-jst-licza-ze-ministerstwo-rozwoju-zgodzi-\sie-na-zmiane,87369.html>, dostęp: 2017-10-01.
- Powell, M. J. (2007): "Developments of NEWUOA for Unconstrained Minimization Without Derivatives," *Dept. Appl. Math. Theoretical Phys., Univ. Cambridge, Cambridge, UK, Tech. Rep. DAMTP*.
- Prud'Homme, R. (1995): "The Dangers of Decentralization," *The World Bank Research Observer*, 10, 201–220.
- Regionalna Izba Obrachunkowa (2015): "Sprawozdanie z działalności regionalnych izb obrachunkowych i wykonania budżetu przez jednostki samorządu terytorialnego w 2015 roku".
- Rodden, J. (2003): "Reviving Leviathan: Fiscal Federalism and the Growth of Government," *International Organization*, 57, 695–729.
- Samuelson, P. A. (1955): "The Pure Theory of Public Expenditures," *Review of Economics and Statistics*, XXXVI, 387–89.
- Schnabel, R. B., J. E. Koontz i B. E. Weiss (1985): "A Modular System of Algorithms for Unconstrained Minimization," *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 11, 419–440.
- Seabright, P. (1996): "Accountability and Decentralisation in Government: An Incomplete Contracts Model," *European Economic Review*, 40, 61–89.
- Sierak, J. (2015): "Finansowanie inwestycji komunalnych w nowej perspektywie funduszy UE 2014-2020," Fragment wykładu dr. Jacka Sieraka Finansowanie inwestycji komunalnych w nowej perspektywie funduszy UE 2014-2020 przygotowanego w ramach Samorządowej Akademii Finansów III edycja.

- Sierak, J., M. Bitner, A. Gałązka i R. Górniak (2013): "Oszacowanie środków niezbędnych do zapewnienia krajowego wkładu publicznego do projektów realizowanych w ramach średniookresowych ram finansowych," Raport z przeprowadzonych badań, Projekt zrealizowany na zlecenie Ministerstwa Rozwoju Regionalnego, Warszawa.
- Skuza, S. (2003a): "Bariery w zaciąganiu kredytów i pożyczek przez jednostki samorządu terytorialnego. Część I," *Bank i Kredyt*, 2, 35–47.
- (2003b): "Bariery w zaciąganiu kredytów i pożyczek przez jednostki samorządu terytorialnego. Część II," *Bank i Kredyt*, 3, 55–69.
- Stewart III, G. (1967): "A Modification of Davidon's Minimization Method to Accept Difference Approximations of Derivatives," *Journal of the ACM (JACM)*, 14, 72–83.
- Tiebout, C. M. (1956): "A Pure Theory of Local Expenditures," *Journal of Political Economy*, 64, 416–424.
- Tommasi, M. i F. Weinschelbaum (2007): "Centralization vs. Decentralization: A Principal-Agent Analysis," *Journal of Public Economic Theory*, 9, 369–389.
- Weingast, B. R. (2009): "Second Generation Fiscal Federalism: The Implications of Fiscal Incentives," *Journal of Urban Economics*, 65, 279–293.
- Wiewióra, M. (2007): "Prawne ograniczenia w zaciąganiu kredytów i pożyczek przez jednostki samorządu terytorialnego: stan obecny a perspektywy," *Bank i Kredyt*, 8–9, 106–115.
- Varian, H. R. (2002): *Mikroekonomia. Kurs średni - ujęcie nowoczesne*, 17, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Aneks

A Rozwiązanie dla czwartego roku

W niniejszym aneksie zaprezentowano alternatywną, numeryczną metodę rozwiązania problemu opisanego w podrozdziale 3.2, w wariantach pierwszym, drugim i czwartym. Jest to problem polegający na maksymalizacji użyteczności samorządu w czwartym roku, przy założeniu napiętej reguły IWZ. Wyniki metody numerycznej, zaimplementowanej w języku R, porównano z rozwiązaniem analitycznym, otrzymanym dzięki zastosowaniu metody Karusha-Kuhna-Tuckera.

Kod rozpoczyna się od wyczyszczenia pamięci podręcznej i załadowania biblioteki `optimx`, która zawiera algorytmy czternastu metod numerycznych służących optymalizacji nieliniowych funkcji wielu zmiennych, z czego poniżej wykorzystanych będzie dwanaście. Ładowana jest także biblioteka `nleqslv` służąca do rozwiązywania układu równań nieliniowych. Później określany jest zbiór dwunastu numerycznych metod optymalizacyjnych. Potem następują deklaracje parametrów i zmiennych o z góry ustalonych wartościach. Wszystkie zmienne, co do zasady, mają wartości wynikające z analizy przeprowadzonej w rozdziale 4. Dochód y_1 wynosi 1 jednostkę, pełni zatem funkcję tzw. „numéraire”.

```
rm( list=ls ( ) )  
library ( optimx )  
library ( nleqslv )
```

```
metody<-c ( "BFGS" , "CG" , "Nelder-Mead" , "L-BFGS-B" , "nlm" , "nlminb" ,  
"spg" , "ucminf" , "newuoa" , "bobyqa" , "nmkb" , "hjk" )
```

```
alpha<-0.4  
beta<-0.1  
upsilon<-0.25  
theta<-0.62  
r<-0.039  
chi<-0.2  
gamma<-0.044  
delta<-0.059  
y1<-1  
y2<-y1*(1+gamma)  
y3<-y2*(1+gamma)  
y4<-y3*(1+gamma)  
y5<-y4*(1+gamma)  
b1<-0.32*y1  
b2<-0.32*y2  
b3<-0.32*y3  
b4<-0.32*y4  
c1<-0.9*y1  
c2<-0.9*y2  
c3<-0.9*y3  
k3<-2.06*y3  
k4<-2.06*y4  
  
u1<-upsilon*y1
```

```

U1<-upsilon*y1
u2<-upsilon*y2
U2<-upsilon*y2
u3<-upsilon*y3
U3<-upsilon*y3
# celowy brak u4
U4<-upsilon*y4
u5<-upsilon*y5
U5<-upsilon*y5

```

Poniżej zapisano wzór na funkcję użyteczności. Należy zauważyć, że nadwyżka budżetowa (z_4) w roku czwartym jest równa dokładnie tyle, aby napięty był warunek ograniczający wynikający z reguły IWZ. Warto także zwrócić uwagę na sposób zapisania warunków ograniczających dotyczących: ograniczenia budżetowego (1), nieprzekraczania prognozy przez inwestycje unijne (2), nieujemności zmiennych (3, 4, 5) oraz reguły zrównoważonego wyniku bieżącego (6). Zostały one zapisane w postaci „kar”, co oznacza, że jeżeli dany warunek nie zostałby spełniony, to funkcja użyteczności zostałaby powiększona o tak dużą liczbę (tutaj 999), że nie mogłaby zostać wybrana jako optymalna albo rozwiązanie przyjęłoby na tyle duże wartości, że niespełnienie warunków byłoby ewidentne. Metody z biblioteki `optimx` mają na celu minimalizację funkcji, więc wartość użyteczności pomnożono przez -1, a kary mogą przyjąć tylko wartości nieujemne.

```

uzyt<-function(p){
  c4<-p[1]
  u4<-p[2]
  i4<-p[3]
  z4<-(y5+u5)/(chi+r)*(1/3*(((y4-c4-r*b4)/(y4+u4))+
    ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3))+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))))-b4
  b5<-b4+z4
  k5<-((1-delta)*k4+(1+theta)*u4+i4)

  kara<-0*c(1:6)
  kara[1]<-(((1+theta)*u4 + i4 + c4 + r*b4) > (u4 + y4 + z4))*999
  kara[2]<-(u4>U4)*999
  kara[3]<-(c4<0)*999
  kara[4]<-(u4<0)*999
  kara[5]<-(i4<0)*999
  kara[6]<-(c4+r*b4>y4)*999
  return(-(- abs(sum(kara)*which.max(abs(c(c4,u4,i4))))
    + alpha*log(c4) + (1-alpha)*log(k5)))
}

```

Celem pomocniczej funkcji `roz` jest zastosowanie dwunastu metod dla zadanego startowego wektora parametrów (c_4, u_4, i_4), a następnie wybór parametrów, dla którego funkcja celu była minimalna (co odpowiada maksymalizacji użyteczności i spełnieniu warunków ograniczających). Ów nowy najlepszy wektor parametrów jest następnie wykorzystywany jako startowy w kolejnej iteracji - do momentu, aż wszystkie metody zbiegną do bardzo zbliżonego rozwiązania.

```

uz<-0*c(1:12)

roz<-function(rozw){
  wsp<-as.matrix(coef(optimx(rozw, uzyt, method=metody)))

```

```

uz<-apply(wsp, 1, uzyt)
rozv2<-wsp[which.min(uz),]
print(summary(optimx(rozv, uzyt, method=metody)))
return(as.vector(rozv2))
}

```

A.1 Przykładowe rozwiązanie wariantu I

W wariacie pierwszym z podrozdziału 3.2, optymalnie jest przeznaczyć całość budżetu na c_4 . Do takiego rozwiązania można doprowadzić, ustalając dużą wartość infrastruktury, np. $k_4 = 5y_4$. W celu uniknięcia ograniczenia regułą nadwyżki operacyjnej, należy też zmniejszyć przestrzeń na nowe wydatki, np. określając wysoki poziom długu oraz jego zapadalności, co implikuje wysokie koszty obsługi długu, np. $b_4 = y_4$ oraz $\chi = 0,3$. Zgodnie z równaniem (8) opisującym optymalną wartość wydatków bieżących, przy założeniu ww. wartości parametrów, c_4^* powinna równać się 0,6847, co daje użyteczność 0,85517.

```

b4<-y4
chi<-0.3
k4<-5*y4

phi<-(((y5+u5)/(chi+r))*1/3*(((y3-c3-r*b3)/(y3+u3))+
((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))))-((1+r)*b4)+y4
c4<-(phi + 1/3*(y5+u5)/(chi+r)*(y4-r*b4)/y4)/(1+((y5+u5)/(3*(chi+r)*y4)))
c4
[1] 0.6846881
  uzyt(c(c4,0,0))
[1] -0.8551658

```

Niżej stosowane metody optymalizacji wymagały podania wektora startowego rozwiązań dopuszczalnych. Celowo podawane były rozwiązania odległe od optymalnych, aby ograniczyć ryzyko wpływu wektora startowego na ewentualne utknięcie w ekstremum lokalnym.

Spośród wybranych metod numerycznych, za pierwszym razem najlepszy wynik przyniosła metoda `nmkb`. W drugim kroku, najskuteczniejszy okazał się algorytm Nelder-Meada, a osiągnięty na tym etapie wynik nie został już poprawiony w kroku trzecim. Rekomendowane c_4 w nieznacznym stopniu odbiegało od c_4^* .

```

rozv<-c(0.01, 0.01, 0.01)
rozv<-roz(rozv)

```

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	4.342974e-01	2.837601e-01	2.094110e-01	-0.7437300	94
CG	3.267592e+09	9.041155e+08	5.580960e+08	2975.3804341	29
Nelder-Mead	5.433095e-02	1.507600e-10	1.404295e-10	0.1583819	244
L-BFGS-B	5.615198e-01	1.491199e-01	9.587649e-02	-0.8125134	62
nlm	6.507736e-01	4.283142e-02	3.026631e-02	-0.8459106	NA
nlinb	5.465958e-01	1.758196e-01	1.123577e-01	-0.8080031	86
spg	6.478063e-01	4.673108e-02	3.267351e-02	-0.8450417	225
ucminf	1.250257e-01	2.844731e-01	1.794278e-01	-0.2427673	55
newuoa	5.283620e-01	1.319694e-01	1.997353e-01	-0.7961343	159
bobyqa	5.075304e-01	1.886673e-01	1.805691e-01	-0.7875587	202

nmkb	6.822232e-01	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	227
hjk	1.000000e-02	1.000000e-02	1.000000e-02	0.8324565	1

```
rozv<-roz(rozv)
```

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.6822232	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	33
CG	0.6822232	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	33
Nelder-Mead	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-0.8551641	232
L-BFGS-B	0.6822232	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	21
nlm	0.6838727	1.102048e-03	6.699616e-04	-0.8549642	NA
nlminb	0.6842194	6.361163e-04	3.823492e-04	-0.8550502	63
spg	0.6842196	6.357486e-04	3.821222e-04	-0.8550502	133
ucminf	0.6841698	7.027289e-04	4.233601e-04	-0.8550379	31
newuoa	0.6840563	9.740146e-04	3.888976e-04	-0.8550169	98
bobyqa	0.6839232	1.176246e-03	4.641879e-04	-0.8549842	50
nmkb	0.6845984	2.516880e-06	2.022294e-04	-0.8551365	184
hjk	0.6822232	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	1

```
rozv<-roz(rozv)
```

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	31
CG	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	31
Nelder-Mead	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	228
L-BFGS-B	NA	NA	NA	8.988466e+307	NA
nlm	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	NA
nlminb	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	47
spg	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	1
ucminf	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	1
newuoa	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	44
bobyqa	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	32
nmkb	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	202
hjk	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	1

A.2 Przykładowe rozwiązanie wariantu II

W drugim wariantcie z podrozdziału 3.2, część budżetu przeznaczana się na c_4 , a resztę - na $u_4 < U_4$. Aby uzyskać takie rozwiązanie optymalne, można wybrać np. następujące parametry: $\theta = 0, 4; b_4 = y_4; \chi = 0, 3$ oraz $k_4 = 3, 2y_4$. Obniżenie θ z 0,62 powoduje, że inwestycje unijne stają się jeszcze tańsze w porównaniu do inwestycji finansowanych ze środków własnych.

Funkcja `spr` wskazuje, w jakim stopniu c_4 i u_4 są odległe od wypełniania warunków I rzędu. Jeżeli wektor wartości funkcji `spr` jest bliski wektorowi zerowemu, oznacza to, że proponowane rozwiązania są optymalne.

```
spr<-function(arg){
  c4<-arg[1]
  u4<-arg[2]
  wyn1<-phi-(theta*u4)-(c4*(1+((y5+U5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))))+
  (((y5+U5)/(chi+r))*1/3*((y4-r*b4)/(y4+u4)))
  wyn2<-(-alpha/c4)/(1+(y5+u5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))-
```

```

      ( -((1-alpha)*(1+theta)) / (((1-delta)*k4)+(1+theta)*u4) ) /
      ( theta+(y4-r*b4-c4)*(1/3)*(y5+U5)/(chi+r) / ((y4+u4)^2) )
    return(c(wyn1, wyn2))
  }

```

W pierwszym kroku, najwyższą użyteczność uzyskano za pomocą metody Nelder-Meada, w drugim - najskuteczniejsza okazała się metoda nmkb. W trzecim kroku nie udało się istotnie poprawić rozwiązania.

```

theta<-0.4
b4<-y4
chi<-0.3
k4<-3.2*y4

```

```

rozv<-c(0.01, 0.01, 0.01)
rozv<-roz(rozv)

```

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	4.445973e-01	2.835915e-01	2.452655e-01	-0.5177622	106
CG	8.824725e+08	3.211441e+08	2.293887e+08	2976.5590342	27
Nelder-Mead	6.309422e-01	1.105637e-01	2.592008e-02	-0.5855316	476
L-BFGS-B	5.480271e-01	1.808719e-01	1.320513e-01	-0.5622723	65
nlm	6.458900e-01	5.369438e-02	4.121027e-02	-0.5841010	NA
nlminb	3.868893e-01	2.844733e-01	2.060523e-01	-0.4565231	105
spg	6.432706e-01	5.740136e-02	4.385811e-02	-0.5838015	171
ucminf	1.551657e-01	2.844731e-01	8.543928e-01	-0.1805561	97
newuoa	5.087967e-01	1.370882e-01	2.660835e-01	-0.5439032	305
bobyqa	5.321465e-01	7.720664e-02	2.716282e-01	-0.5496350	153
nmkb	6.049490e-01	1.428279e-06	1.820574e-01	-0.5689281	169
hjkb	1.000000e-02	1.000000e-02	1.000000e-02	1.0989698	
1					

```
rozv<-roz(rozv)
```

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	31
CG	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	31
Nelder-Mead	0.6309422	0.1105636	2.592008e-02	-0.5855316	134
L-BFGS-B	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	21
nlm	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	NA
nlminb	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	47
spg	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	1
ucminf	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	1
newuoa	0.6321337	0.1188981	1.642245e-02	-0.5866472	78
bobyqa	0.6311731	0.1127103	2.362842e-02	-0.5857966	40
nmkb	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-0.5886383	248
hjkb	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	1

```
rozv<-roz(rozv)
```

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	32
CG	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	32
Nelder-Mead	0.6355420	0.1299400	4.126409e-06	-5.886385e-01	133
L-BFGS-B	NA	NA	NA	8.988466e+307	NA

nlm	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	NA
nlminb	0.6355418	0.1299404	4.128838e-06	-5.886385e-01	55
spg	0.6355418	0.1299404	4.128423e-06	-5.886385e-01	47
ucminf	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	1
newuoa	0.6355422	0.1299408	2.947567e-06	-5.886386e-01	49
bobyqa	0.6355411	0.1299410	5.144485e-06	-5.886384e-01	33
nmkb	0.6355442	0.1299352	2.202026e-06	-5.886385e-01	172
hjk	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	1

Skoro wszystkie metody zbiegły do zbliżonych rozwiązań, przy czym $i_4 = 0$, a $u_4 < U_4 = 0,2844733$, to wydawać by się mogło, że otrzymano rozwiązanie optymalne. Poniższy fragment kodu świadczy o tym, że warunek (11) został spełniony.

```
c4<-rozw [1]
u4<-rozw [2]
i4<-rozw [3]
```

$$\text{phi} <- ((y5+U5)/(chi+r)) * 1/3 * (((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)) + ((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))) - ((1+r)*b4) + y4$$

```
phi - (theta*u4) - (c4*(1+((y5+U5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))) +
  (((y5+U5)/(chi+r))*1/3*((y4-r*b4)/(y4+u4)))
[1] 3.056757e-06
```

Pojawił się jednak problem z warunkami (9) oraz (10). Implikowane przez te warunki I rzędu, wartości parametrów λ różnią się na drugim miejscu po przecinku.

```
(-alpha/c4)/(1+(y5+u5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))
[1] -0.2925093
```

```
(-((1-alpha)*(1+theta))/(((1-delta)*k4)+(1+theta)*u4))/
  (theta+(y4-r*b4-c4)*(1/3)*(y5+U5)/(chi+r)/((y4+u4)^2))
[1] -0.2852824
```

Przyjęcie innych wartości startowych nie przyczyniło się do poprawy rozwiązania. Niezbędne stało się więc numeryczne rozwiązanie, za pomocą biblioteki `nleqslv` układu równań (9), (10) i (11). Rozwiązanie optymalne pozwoliło na osiągnięcie użyteczności w wysokości zbliżonej do uzyskanej w metodzie numerycznej (różnica na trzecim miejscu po przecinku). Wartości optymalne zmiennych decyzyjnych również okazały się stosunkowo podobne: $c_4^* = 0,645$ w porównaniu do $c_4 = 0,636$ oraz $u_4^* = 0,105$ w porównaniu do $u_4 = 0,130$.

```
nleqslv(c(0.01, 0.01), spr)
\$x
[1] 0.6448150 0.1054819
\$fvec
[1] -2.860121e-09 -4.772498e-09
$message
[1] "Function criterion near zero "
```

```
rozw<-c(nleqslv(c(0.01, 0.01), spr)\$x,0)
rozw [1]<-rozw [1]-0.0000001
uzyt(rozw)
```



```
[1] -0.588711
```

```
c4<-rozv [1]  
u4<-rozv [2]  
i4<-rozv [3]
```

```
(-alpha/c4)/(1+ (y5+u5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))  
[1] -0.2852989
```

```
(-((1-alpha)*(1+theta))/(((1-delta)*k4)+(1+theta)*u4))/  
+ (theta+(y4-r*b4-c4)*(1/3)*(y5+U5)/(chi+r)/((y4+u4)^2))  
[1] -0.2852989
```

A.3 Przykładowe rozwiązanie wariantu IV

W wariantcie IV inwestycje unijne realizowane są w maksymalnym stopniu, a pozostała część budżetu przeznaczana jest na wydatki bieżące oraz inwestycje zwykłe. Założono domyślne wartości parametrów, tj. zaprezentowane w tabeli 6 i przytoczone na początku aneksu.

Wartości c_4^* oraz i_4^* można obliczyć wprost z równań 12 i 13.

```
phi<-((y5+U5)/(chi+r))*1/3*(((y3-c3-r*b3)/(y3+u3))+  
((y2-c2-r*b2)/(y2+u2)))-(1+r)*b4+y4  
lambda<-(-1/(phi+(1/3*(y5+u5)*(y4-r*b4)/(chi+r)/(y4+U4))+  
(1-delta)*k4+U4))  
c4<-(-alpha/(lambda*(1+(y5+U5)/(3*(chi+r)*(y4+U4))))))  
c4  
[1] 0.8429715
```

```
i4<-(-(1-alpha)/lambda-(1-delta)*k4-(1+theta)*U4)  
i4  
[1] 0.4389845
```

```
> uzyt(c(c4, U4, i4)-0.0000000001)  
[1] -0.6115937
```

Zastosowanie numerycznych metod optymalizacyjnych pozwoliło na uzyskanie zbliżonych rozwiązań do uzyskanych metodą analityczną.

```
rozv<-c(0.1, 0.1, 0.1)  
rozv<-roz(rozv)
```

	p1	p2	p3	value
BFGS	9.324062e-01	2.835457e-01	2.132998e-01	-6.063469e-01
CG	5.558534e+08	4.738556e+08	2.925034e+08	2.976477e+03
Nelder-Mead	1.095784e+00	2.880704e-03	2.679361e-03	-5.132262e-01
L-BFGS-B	NA	NA	NA	8.988466e+307
nlm	8.854126e-01	2.844731e-01	3.346731e-01	-6.107427e-01
nlinb	6.908261e-01	2.844733e-01	2.138724e-01	-4.868272e-01
spg	8.223586e-01	2.844733e-01	2.138724e-01	-5.565426e-01
ucminf	2.380302e-01	2.844732e-01	2.138723e-01	-6.063101e-02
newuoa	7.135990e-01	2.844732e-01	2.833031e-01	-5.140912e-01

bobyqa	7.964228e-01	2.844731e-01	2.386150e-01	-5.488558e-01
nmkb	8.375894e-01	2.844579e-01	4.522142e-01	-6.115774e-01
hjk	1.000000e-01	1.000000e-01	1.000000e-01	3.790474e-01

rozw<-roz(roz)

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	31
CG	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	31
Nelder-Mead	0.8375904	0.2844581	0.4522147	-0.6115780	139
L-BFGS-B	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	21
nlm	0.8375899	0.2844582	0.4522144	-0.6115777	NA
nlminb	0.8375903	0.2844585	0.4522145	-0.6115781	52
spg	0.8375903	0.2844585	0.4522145	-0.6115781	114
ucminf	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	1
newuoa	0.8375865	0.2844614	0.4522211	-0.6115784	52
bobyqa	0.8375898	0.2844584	0.4522140	-0.6115777	33
nmkb	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	157
hjk	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	1

rozw<-roz(roz)

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	32
CG	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	32
Nelder-Mead	0.8377103	0.2844701	0.4519094	-0.6115803	138
L-BFGS-B	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	21
nlm	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	NA
nlminb	0.8377098	0.2844704	0.4519102	-0.6115803	49
spg	0.8377098	0.2844704	0.4519102	-0.6115803	68
ucminf	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	1
newuoa	0.8377092	0.2844701	0.4519116	-0.6115802	48
bobyqa	0.8377099	0.2844700	0.4519103	-0.6115802	35
nmkb	0.8377362	0.2844729	0.4518425	-0.6115806	161
hjk	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	1

B Analityczne rozwiązanie dla trzeciego roku z napiętym warunkiem IWZ - szczegółowe obliczenia

W tej części aneksu zaprezentowano szczegółowe obliczenia streszczone w podrozdziale 3.3. Wyjściowy punkt obliczeń stanowi funkcja Lagrange'a w postaci:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{j=1}^5 \mu_{j3} g_{j3}(x) = \\
&= \alpha \ln c_3 + (1 - \alpha) \ln((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + \\
&+ \beta \alpha \ln \left(\frac{\alpha \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3) \right)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4}} \right) + \\
&+ \frac{\alpha(y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4}} + \\
&+ \beta(1 - \alpha) \ln((1 - \alpha)(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + (1 - \alpha)U_4 + \\
&+ (1 - \alpha) \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - r b_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - r b_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \right) \\
&- (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + r b_3 - y_3) + y_4) + \\
&+ \mu_{53} \left(\frac{(\chi + r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + r b_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - r b_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - r b_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - r b_3}{y_3 + U_3} \right) \right).
\end{aligned}$$

Następnie wyprowadzono dwa warunki pierwszego rzędu, czyli obliczono pochodne funkcji Lagrange'a po c_3 i i_3 oraz przyrównano je do zera. Trzecie równanie - napięta reguła IWZ - zostanie użyte dopiero w dalszej części obliczeń. W dalszych obliczeniach zrezygnowano z oznaczania wartości optymalnych zmiennych decyzyjnych za pomocą gwiazdek.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} &= \frac{\alpha}{c_3} \\
&+ \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
&+ \frac{\beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right)}{k_5} \\
&+ \mu_{53} \left(\frac{\chi + r}{y_4 + U_4} + \frac{1}{3(y_3 + U_3)} \right) = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_3} &= \frac{1 - \alpha}{k_4} \\
&+ \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - (1 + r) + 1 - \delta \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
&+ \frac{\beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - (1 + r) + 1 - \delta \right)}{k_5} \\
&+ \mu_{53} \frac{\chi + r}{y_4 + U_4} = 0.
\end{aligned}$$

Poniższe przekształcenia mają na celu rozpisanie zmiennej k_5 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} &= \frac{\alpha}{c_3} \\
&+ \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
&+ \frac{\beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right)}{(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4} \\
&+ \mu_{53} \left(\frac{\chi + r}{y_4 + U_4} + \frac{1}{3(y_3 + U_3)} \right) = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_3} &= \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3} \\
&+ \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
&+ \frac{\beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right)}{(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4} \\
&+ \mu_{53} \frac{\chi + r}{y_4 + U_4} = 0.
\end{aligned}$$

Połączenie dwóch równań w jedno umożliwia wyeliminowanie mnożnika μ_{53} o nieznannej wartości.

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{c_3} \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) \\
& + \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right) \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
& + \frac{\beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right) \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right)}{(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4} \\
& = \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3} \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \\
& + \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
& + \frac{\beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right)}{(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4}.
\end{aligned}$$

Następnie warto połączyć liczniki ułamków o tych samych mianownikach:

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{c_3} \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) \\
& + \frac{\beta \alpha \left(\left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right) \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) - \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + r b_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
& + \frac{\beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(\left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right) \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) - \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \right)}{(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r b_4}{y_4 + U_4} \right) - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4} \\
& - \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_3 + i_3 + (1 + \theta)U_3} \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) = 0. \tag{23}
\end{aligned}$$

W równaniu (23) występuje, pochodząca ze wzoru na k_5 zmienna ϕ , która zależy m.in. od i_3 oraz c_3 . W poniższych obliczeniach rozpisano zatem ϕ z uwzględnieniem współczynników stojących przy i_3 i c_3 . Warto podkreślić, że pochodne zostały wcześniej wyprowadzone prawidłowo, zgodnie z formułą na pochodną logarytmu $\frac{\partial \log(k_5)}{\partial c_3} = \frac{k_5'(c_3)}{k_5(c_3)}$. W funkcji Lagrange'a k_5 i ϕ zostały bowiem szczegółowo rozpisane. Umożliwiło to poprawne obliczenie k_5' z licznika pochodnej.

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} - (1 + r)b_4 + y_4 \\
\phi &= c_3 \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{-1}{y_3 + U_3} \right) + \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - r b_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - r b_3}{y_3 + U_3} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + r b_3 - y_3) + y_4 \right) \\
\phi &= i_3(-1 - r) + c_3 \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{-1}{y_3 + U_3} - (1 + r) \right) \\
& + \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - r b_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - r b_3}{y_3 + U_3} \right) - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + r b_3 - y_3) + y_4 \right) \\
\phi &= i_3 \phi_0 + c_3 \phi_1 + \phi_2.
\end{aligned}$$

Poniżej wykorzystuje się równanie na napięty warunek IWZ. Dzięki niemu można wyznaczyć c_3 jako funkcję i_3 . Ostatecznie zatem w rachunkach pozostanie jedna zmienna decyzyjna - i_3 .

$$\begin{aligned} \frac{(\chi+r)b_4}{y_4+U_4} &= \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} \\ \frac{(\chi+r)b_4}{y_4+U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - rb_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} \right) &= \frac{1}{3} \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \\ c_3 &= -3(y_3 + U_3) \left(\frac{(\chi+r)b_4}{y_4+U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= -3(y_3 + U_3) \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\ c_3 \left(1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4 + U_4} \right) &= -3(y_3 + U_3) \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\ c_3 &= \frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4 + U_4}} \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\ c_3 &= i_3 \left(\frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4 + U_4}} \frac{\chi+r}{y_4 + U_4} \right) \\ &+ \frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4 + U_4}} \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\ \phi_3 &= \left(\frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4 + U_4}} \frac{\chi+r}{y_4 + U_4} \right) \\ \phi_4 &= \frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4 + U_4}} \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\ c_3 &= i_3 \phi_3 + \phi_4 \\ \phi &= i_3 \phi_0 + (i_3 \phi_3 + \phi_4) \phi_1 + \phi_2 \\ \phi &= i_3 (\phi_0 + \phi_3 \phi_1) + \phi_4 \phi_1 + \phi_2. \end{aligned}$$

W celu łatwiejszego wykonania obliczeń, zastąpiono długie i złożone wyrazy w poszczególnych ułamkach równania (23), kolejnymi oznaczeniami ϕ_i i uzyskano w ten sposób proste równanie (24).

$$\begin{aligned}
\phi_5 &= \alpha \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) \\
\phi_6 &= \beta \alpha \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) - \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \\
\phi_8^{\text{bis}} &= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - \phi_4 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + U_4 \\
&= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - \phi_4 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + U_4 \\
&= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - \phi_4 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + i_3 + i_3 \phi_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + U_4 \\
\phi_8 &= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - \phi_4 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + U_4 \\
\phi_7 &= -\delta - r - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{\phi_3}{y_3 + U_3} + r \frac{1 + \phi_3}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)\phi_3 \\
\phi_9 &= \beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) - \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{11}^{\text{bis}} &= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 \\
&= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 \\
&= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + i_3 + i_3 \phi_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 \\
&= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 - i_3 r(1 + \phi_3)(1 - \alpha) \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \right) \frac{1}{y_4 + U_4} \\
\phi_{11} &= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 \\
\phi_{10} &= (1 - \delta)(1 - \alpha) + (1 - \alpha)(\phi_0 + \phi_3 \phi_1) - r(1 + \phi_3)(1 - \alpha) \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \right) \frac{1}{y_4 + U_4} \\
\phi_{12} &= (1 - \alpha) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \\
\phi_{13} &= (1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3
\end{aligned}$$

$$\frac{\phi_5}{i_3 \phi_3 + \phi_4} + \frac{\phi_6}{i_3 \phi_7 + \phi_8} = -\frac{\phi_9}{i_3 \phi_{10} + \phi_{11}} + \frac{\phi_{12}}{i_3 + \phi_{13}}$$

$$\frac{\phi_5(i_3 \phi_7 + \phi_8) + \phi_6(i_3 \phi_3 + \phi_4)}{(i_3 \phi_3 + \phi_4)(i_3 \phi_7 + \phi_8)} = -\frac{\phi_9(i_3 + \phi_{13}) - \phi_{12}(i_3 \phi_{10} + \phi_{11})}{(i_3 \phi_{10} + \phi_{11})(i_3 + \phi_{13})}. \quad (24)$$

Dalsze przekształcenia równania (24) doprowadziły do uzyskania równania sześciennego.

$$(\phi_5(i_3\phi_7 + \phi_8) + \phi_6(i_3\phi_3 + \phi_4))((i_3\phi_{10} + \phi_{11})(i_3 + \phi_{13})) + (\phi_9(i_3 + \phi_{13}) - \phi_{12}(i_3\phi_{10} + \phi_{11}))((i_3\phi_3 + \phi_4)(i_3\phi_7 + \phi_8)) = 0$$

$$(i_3(\phi_5\phi_7 + \phi_3\phi_6) + \phi_5\phi_8 + \phi_4\phi_6)(i_3^2\phi_{10} + i_3(\phi_{10}\phi_{13} + \phi_{11}) + \phi_{11}\phi_{13}) + (i_3(\phi_9 - \phi_{10}\phi_{12}) + \phi_9\phi_{13} - \phi_{11}\phi_{12})(i_3^2\phi_3\phi_7 + i_3(\phi_3\phi_8 + \phi_4\phi_7) + \phi_4\phi_8) = 0$$

$$\begin{aligned} & i_3^3(\phi_{10}(\phi_5\phi_7 + \phi_3\phi_6) + \phi_3\phi_7(\phi_9 - \phi_{10}\phi_{12})) + \\ & i_3^2(\phi_{10}(\phi_5\phi_8 + \phi_4\phi_6) + (\phi_5\phi_7 + \phi_3\phi_6)(\phi_{10}\phi_{13} + \phi_{11}) + \phi_3\phi_7(\phi_9\phi_{13} - \phi_{11}\phi_{12}) + (\phi_9 - \phi_{10}\phi_{12})(\phi_3\phi_8 + \phi_4\phi_7)) + \\ & i_3((\phi_5\phi_7 + \phi_3\phi_6)\phi_{11}\phi_{13} + (\phi_{10}\phi_{13} + \phi_{11})(\phi_5\phi_8 + \phi_4\phi_6) + (\phi_9 - \phi_{10}\phi_{12})\phi_4\phi_8 + (\phi_3\phi_8 + \phi_4\phi_7)(\phi_9\phi_{13} - \phi_{11}\phi_{12})) + \\ & (\phi_5\phi_8 + \phi_4\phi_6)\phi_{11}\phi_{13} + (\phi_9\phi_{13} - \phi_{11}\phi_{12})\phi_4\phi_8 \\ & = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

$$ai^3 + bi^2 + ci + d = 0.$$

Istnieją trzy możliwe rozwiązania równania sześciennego:

$$\begin{aligned} i_3^* &= \left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) (3ac - b^2)}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a} \\ &\quad \text{lub} \\ i_3^* &= \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad - \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) (3ac - b^2)}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a} \\ &\quad \text{lub} \\ i_3^* &= \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad - \frac{3ac - b^2}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a}. \end{aligned} \tag{26}$$

C Rozwiązanie dla trzeciego roku

C.1 Przykładowe rozwiązanie metodą analityczną

Kod R służący do znalezienia rozwiązań dla trzeciego i czwartego roku rozpoczyna się od załadowania bibliotek opisanych w części A aneksu. Następnie deklarowane są wartości parametrów i startowych poziomów zmiennych.

```
library(nleqslv)
```

```
library (optimx)
```

```
#####  
#Deklaracje wartości parametrów i startowych poziomów zmiennych#  
#####
```

```
alpha<-0.4  
beta<-0.1  
gamma<-0.044  
delta<-0.059  
theta<-0.62  
r<-0.039  
chi<-0.2  
y1<-1  
y2<-y1*(1+gamma)  
y3<-y2*(1+gamma)  
y4<-y3*(1+gamma)  
y5<-y4*(1+gamma)  
b1<-0.32*y1  
b2<-0.32*y2  
b3<-0.32*y3  
c1<-0.9*y1  
c2<-0.9*y2  
k3<-2.06*y4  
upsilon<-0.25
```

```
u1<-upsilon*y1  
U1<-upsilon*y1  
u2<-upsilon*y2  
U2<-upsilon*y2  
u3<-upsilon*y3  
U3<-upsilon*y3  
u4<-upsilon*y4  
U4<-upsilon*y4  
u5<-upsilon*y5  
U5<-upsilon*y5
```

Poniżej znajdują się równania na pomocnicze zmienne ϕ_i , które są używane do zdefiniowania współczynników równania sześciennego (patrz 25).

```
#####  
# Rozwiązanie metodą Karusha–Kuhna–Tuckera #  
#####
```

```
phi0<-(-1-r)  
phi1<-(-(y5+u5)/((chi+r)*3*(y3+u3)) -(1+r))  
phi2<-((y5+u5)/(chi+r)/3*((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-r*b3)/(y3+u3)) -  
      (1+r)*(b3+ theta*u3+r*b3-y3) + y4)  
phi3<-(-3*(y3+u3)*(chi+r)/(1+3*(y3+u3)*(chi+r)/(y4+u4))/(y4+u4))  
phi4<-(-  
      -3*(y3+u3)/(1+3*(y3+u3)*(chi+r)/(y4+u4))
```



```

*(((chi+r)*(b3+ theta*u3 + r*b3 - y3))/(y4+u4)
- 1/3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) + (y2-c2-r*b2)/(y2+u2)) -
1/3*(y3-r*b3)/(y3+u3)
)
phi5<-(alpha*(((y4+u4)*(3*(y3+u3)))/((chi+r)*(3*(y3+u3))+y4+u4)))
phi6<-(alpha*beta*
((( -(y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3) + r/(y4+u4))) -
(1+r))*(((y4+u4)*(3*(y3+u3)))/((chi+r)*
(3*(y3+u3))+y4+u4))) -
(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta - r)*
((y4+u4)/(chi+r)))
phi7<-((-delta-r) - ((y5+u5)/(chi+r)/3*(phi3/(y3+u3) +
r*(1+phi3)/(y4+u4))) - (1+r)*phi3)
phi8<-(
((y5+u5)/(chi+r)/3)
* ((y3-phi4-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+
((y4 - r*(b3 + theta*u3 + phi4 + r*b3 - y3))/(y4+u4)))
-(((1+r)*(b3+theta*u3 + phi4 + r*b3 - y3)))
+(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3) + u4)
)
phi9<-(
beta*(1-alpha)*(1-alpha)*((( -(y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3) +
r/(y4+u4))-(1+r))) * (((y4+u4)*(3*(y3+u3)))/
((chi+r)*(3*(y3+u3))+y4+u4)) -
(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta-r)*((y4+u4)/(chi+r)))
)
phi10<-((1-delta)*(1-alpha)) + (1-alpha)*(phi0 + phi3*phi1) -
r*(1+phi3)*(1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3)/(y4+u4)
phi11<-(
(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3)
+((1-alpha)*(phi4*phi1 + phi2 + (y5+u5)*
(y4-r*(b3 + theta*u3 + phi4 +r*b3 - y3)))/(chi+r)/3/(y4+u4))
- alpha*(1-delta)*((1-delta)*k3 +
(1+theta)*u3) - (theta+alpha)*u4
+ (1+theta)*u4
)
phi12<-((1-alpha)*((y4+u4)/(chi+r)))
phi13<-((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3)

par_a<-(
(phi5*phi7+phi3*phi6)*phi10 +
(phi9 - phi10*phi12)*phi3*phi7
)
par_b<-(
(phi5*phi8 + phi4*phi6)*phi10 +
(phi5*phi7+phi3*phi6)*(phi10*phi13 + phi11) +
(phi9*phi13 - phi11*phi12)*phi3*phi7 +
(phi9 - phi10*phi12)*(phi3*phi8 + phi4*phi7)
)
par_c<-(
(phi5*phi8 + phi4*phi6)*(phi10*phi13 + phi11) +

```

```

(phi9*phi13 - phi11*phi12)*(phi3*phi8 + phi4*phi7) +
(phi9 - phi10*phi12)*phi4*phi8 +
(phi5*phi7+phi3*phi6)*phi11*phi13
)
par_d<-(
(phi5*phi8 + phi4*phi6)*phi11*phi13 +
(phi9*phi13 - phi11*phi12)*phi4*phi8
)

```

Dwa pierwsze rozwiązania są nieprawidłowe. Wydatki inwestycyjne nie mogą bowiem być ujemne. Warto zauważyć, że część poniższych obliczeń wymagało rachunków na liczbach zespolonych.

```

#####
# Rozwiązania niedopuszczalne #
#####

```

```

szesciennel<-function(a,b,c,d){
  f<-(3*a*c - b^2)
  h<-as.complex(as.complex(27*(a^2)*(d^2) + (4*(b^3) -
    (18*a*b*c))*d + (4*a*(c^3)) - (b^2 * c^2))^(1/2))
  i<-(2*3^(3/2))*a^2
  j<-27*(a^2)*d - (9*a*b*c) + 2*(b^3)
  k<-54*a^3
  g<-(9*a^2)*((h/i - j/k)^(1/3))
  l<-complex(imaginary =-(3^0.5)/2, real = -1/2)
  m<-complex(imaginary =+(3^0.5)/2, real = -1/2)
  e<-as.complex(h/i - j/k)
  return(l*e^(1/3) - (m*f)/g -b/(3*a))
}

```

```

x<-szesciennel(par_a, par_b, par_c, par_d)
x
[1] -5.452163-0i

```

```

szescienne2<-function(a,b,c,d){
  f<-(3*a*c - b^2)
  h<-as.complex(as.complex(27*(a^2)*(d^2) + (4*(b^3) -
    (18*a*b*c))*d + (4*a*(c^3)) - (b^2 * c^2))^(1/2))
  i<-(2*3^(3/2))*a^2
  j<-27*(a^2)*d - (9*a*b*c) + 2*(b^3)
  k<-54*a^3
  g<-(9*a^2)*((h/i - j/k)^(1/3))
  l<-complex(imaginary =-(3^0.5)/2, real = -1/2)
  m<-complex(imaginary =+(3^0.5)/2, real = -1/2)
  e<-as.complex(h/i - j/k)
  return(m*e^(1/3) - (l*f)/g -b/(3*a))
}

```

```

x<-szescienne2(par_a, par_b, par_c, par_d)
x
[1] -5.839818+0i

```

Rozwiązanie dopuszczalne i optymalne wyniosło 0,512.

```
#####
#   Rozwiązanie dopuszczalne   #
#####
```

```
szescienne3<-function(a,b,c,d){
  h<-as.complex(as.complex(27*(a^2)*(d^2) + (4*(b^3) -
    (18*a*b*c))*d + (4*a*(c^3)) - (b^2 * c^2))^(1/2))
  i<-(2*3^(3/2))*a^2
  j<-27*(a^2)*d - (9*a*b*c) + 2*(b^3)
  k<-54*a^3
  e<-as.complex(h/i - j/k)
  f<-(3*a*c - b^2)
  g<-(9*a^2)*((h/i - j/k)^(1/3))
  return( e^(1/3) - f/g - b/(3*a) )
}
```

```
x<-szescienne3(par_a, par_b, par_c, par_d)
x
[1] 0.5118041+0i
```

```
i3<-as.numeric(x)
u3<-U3
u4<-U4
```

Znając i_3^* , $u_3^* = U_3$, $u_4^* = U_4$ oraz zakładając napięty warunek IWZ, można przystąpić do obliczenia c_3^* , a następnie c_4^* , k_4^* , k_5^* i i_4^* .

```
rozw_c<-function(rozw2){
  return( ((y4+u4)/(chi+r)/
    3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) + (y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
    (y3-rozw2-r*b3)/(y3+u3)))
    - b3 - (1+theta)*u3 - i3 - r*b3 + u3 + y3 - rozw2)
}
```

```
c3<-c(nleqslv(c(0.5), rozw_c)$x)
z3<-(1+theta)*u3 + i3 + c3 + r*b3 - u3 - y3
b4<-b3+z3
```

```
c4<-((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3)
+(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  *(((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+
  ((y4 - r*(b3 + theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3))/(y4+u4))))
  -(alpha*((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3))
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  +(alpha*(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
```

```

) /((1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
)
k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3
k5<-(
(1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3)
+ (1-alpha)*u4 +
(1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
(y3- c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4 -r*b4)/(y4+u4))
- (1+r)*(b3+ theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
)
i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4

```

Dla pewności warto sprawdzić, czy rozwiązanie optymalne i_3^* jest miejscem zerowym równania sześciennego, a także miejscem zerowym warunków I rzędu.

```

#####
# Sprawdzenie #
#####

```

```

phi5/(i3*phi3 + phi4) + phi6/(i3*phi7 + phi8) +
phi9/(i3*phi10 + phi11) - phi12/(i3 + phi13)
[1] -2.220446e-16

```

```

#####
# Sprawdzenie z warunkami I rzędu #
#####

```

```

lewa<-(
+(alpha/c3)
+(alpha*beta*
((-(y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3) + r/(y4+u4))) - (1+r))
/(
((y5+u5)/(chi+r)/3)
* ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
-(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
+(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
)
)
+beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*((1/(y3+u3)) +
(r/(y4+u4)))-(1+r))/k5
)

```

```

prawa<-(
+(1-alpha)/k4
+(beta*alpha*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta - r))
/(
((y5+u5)/(chi+r)/3)
* ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
-(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
)
)

```

```

      +(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
    )
  +beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta -r)/k5
)
pomo<-(
  -lewa/((chi+r)/(y4+u4) + 1/(3*(y3+u3)))
  +prawa/((chi+r)/(y4+u4))
)

pomo
[1] -1.073213e-10

```

Oba testy sprawdzające przyniosły pozytywne wyniki. Zdefiniowanie funkcji użyteczności pozwala na ocenę ilościową rozwiązania uzyskanego metodą analityczną, ale przede wszystkim jest niezbędnym elementem metody numerycznej.

```

#####
# Deklaracja funkcji użyteczności #
#####

uzyt<-function(p){
  c3<-p[1]
  u3<-p[2]
  i3<-p[3]

  z3<-(1+theta)*u3 + i3 + c3 + r*b3 - u3 - y3
  b4<-b3+z3
  k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3

  u4<-U4
  c4<-(
    (((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
    *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3)
    +(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
    *(((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+((y4 - r*b4)/(y4+u4))))
    -(alpha*((1+r)*b4)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
    +(alpha*(y4 + (1-delta)*k4 + u4)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  )
  k5<-(
    (1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) +
      (1-alpha)*u4 + (1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*
        ((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
          (y3- c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4 -r*b4)/(y4+u4))
      - (1+r)*(b3+ theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
  )
  i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4
}

```

```

kara<-0*c(1:6)
kara[1]<-((c3<0)*9999 + (c4<0)*9999)
kara[2]<-((i3<0)*9999 + (i4<0)*9999)
kara[3]<-((u3<0)*9999 + (u3>U3)*9999)
kara[4]<-((c3+r*b3)>y3)*9999
kara[5]<-(((chi+r)*b4)/(y4+u4) > 1/3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) +
(y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-c3-r*b3)/(y3+u3)))*9999
kara[6]<-((c4+r*b4)>y4)*9999
return(-(- abs(sum(kara)*which.max(abs(c(c3,c4,u3,i3,i4))))
+ alpha*log(c3) + (1-alpha)*log(k4) + beta*alpha*log(c4)
+ beta*(1-alpha)*log(k5)))
}

```

```

#####
# Podsumowanie rozwiązania z równania sześciennego #
#####

```

```

> cat(c3, u3, i3)
0.7702622 0.272484 0.5118041
> cat(c4, u4, i4)
0.9416474 0.2844733 0.1231468
> użyt(c(c3,u3,i3))
[1] -0.6400487

```

C.2 Przykładowe rozwiązanie metodą numeryczną

Po rozwiązaniu zadania metodą analityczną, można przejść do poszukiwania rozwiązań optymalnych metodą numeryczną (metodami iteracyjnymi).

```

#####
# Rozwiązanie metodami iteracyjnymi #
#####

```

```

metody<-c("BFGS", "CG", "Nelder-Mead", "L-BFGS-B", "nlm",
"nlinb", "spg", "ucminf", "newuoa", "bobyqa", "nmb", "hjk")

```

```
uz<-0*c(1:12)
```

```

roz<-function(roz){
  wsp<-as.matrix(coef(optimx(roz, użyt, method=metody)))
  uz<-apply(wsp, 1, użyt)
  roz2<-wsp[which.min(uz),]
  print(summary(optimx(roz, użyt, method=metody)))
  return(as.vector(roz2))
}

```

```

konw<-function(roz){
  maks<-uzyt(roz)
  roz2<-roz

```

```

zatrzymaj<-0
while (zatrzymaj==0){
  rozw2<-roz(roz2)
  if ((uzyt(roz2) - maks)>-0.0001){
    zatrzymaj<-1
    print(summary(optimx (roz2, uzyt, method=metody)))
  }
  maks<-uzyt(roz2)
}
return(roz(roz2))
}

```

```

p<-0*c(1:3)
rozw<-c(0.6, 0.1, 0.1)
p<-konw(rozw)

```

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.7893635	0.2717942	0.2005781	-0.5853439	72
CG	0.8445378	0.2723592	0.2040818	-0.6107976	85
Nelder-Mead	0.8778351	0.2724840	0.2475980	-0.6340233	238
L-BFGS-B	0.8272034	0.2505469	0.1914889	-0.5926036	48
nlm	0.8528296	0.2724831	0.3089528	-0.6364645	NA
nlminb	0.8380437	0.2724840	0.2038965	-0.6080164	81
spg	0.8579274	0.2724840	0.2047116	-0.6166466	170
ucminf	0.8430340	0.2724839	0.3330707	-0.6372671	79
newuoa	0.9281488	0.2295716	0.1576467	-0.6184747	148
bobyqa	0.9062702	0.2349570	0.2080398	-0.6232044	87
nmkb	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	240
hjk	0.6000000	0.1000000	0.1000000	-0.3946349	1

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	34
CG	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	34
Nelder-Mead	0.7706362	0.2724815	0.5108881	-0.6400483	149
L-BFGS-B	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	21
nlm	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	NA
nlminb	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	54
spg	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	50
ucminf	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	1
newuoa	0.7706357	0.2724818	0.5108882	-0.6400482	49
bobyqa	0.7706354	0.2724819	0.5108889	-0.6400482	32
nmkb	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	174
hjk	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	1

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	35
CG	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	35
Nelder-Mead	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	218
L-BFGS-B	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	21
nlm	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	NA
nlminb	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	46

spg	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	1
ucminf	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	1
newuoa	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	48
bobyqa	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	30
nmkb	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	175
hjk	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	1

```
p[1]->c3
p[2]->u3
p[3]->i3
```

```
u4<-U4
```

```
c4<-((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
      *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3)
+(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
    /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  *(((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+
    ((y4 - r*(b3 + theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3))/(y4+u4))))
-(alpha*((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3))
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
+(alpha*(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
```

```
)
k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3
```

```
k5<-((1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) +
(1-alpha)*u4 + (1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*
((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4 - r*b4)/(y4+u4))
- (1+r)*(b3+ theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
```

```
)
i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4
z3<-(1+theta)*u3 + i3 + c3 + r*b3 - u3 - y3
b4<-b3+z3
```

```
#####
# Sprawdzenie z warunkami I rzędu #
#####
```

```
lew<-((alpha/c3)
+alpha*beta*
      ((-(y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3)+r/(y4+u4))) - (1+r))
      /((y5+u5)/(chi+r)/3)
      * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+
          ((y4-r*b4)/(y4+u4)))
      -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
      +(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
      )
```



```

)
+beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*((1/(y3+u3))+
(r/(y4+u4)))-(1+r))/k5
)

praw<-(
+(1-alpha)/k4
+(beta*alpha*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta - r))
/(
((y5+u5)/(chi+r)/3)
* ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
-(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
+(y4 + (1-delta)*(1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
)
+beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta -r)/k5
)

spr<-(
-lew/(((chi+r)/(y4+u4) + 1/(3*(y3+u3)))
+praw/(((chi+r)/(y4+u4)))
)
spr
[1] 0.0009746467

```

```

#####
# Podsumowanie rozwiązania metodami iteracyjnymi #
#####

```

```

> cat(c3, u3, i3)
0.7706359 0.2724817 0.5108884
> cat(c4, u4, i4)
0.9415111 0.2844733 0.1234912
> uzyt(c(c3, u3, i3))
[1] -0.6400483

```

Wartość funkcji użyteczności różni się nieznacznie, tylko na siódmym miejscu po przecinku. Jednak nie oznacza to, że metoda numeryczna jest zawsze tak skuteczna. W zależności od określonych parametrów i wartości startowych, różnice mogą być dużo większe (patrz część A aneksu).

C.3 Przykładowe rozwiązanie za pomocą warunków I rzędu

Ostatnim etapem jest zastosowanie metody opierającej się na warunkach I rzędu. Polega na znalezieniu ich miejsc zerowych za pomocą pakietu `optimx`. Wynik okazał się taki sam jak w przypadku metody analitycznej.

```

#####
# Rozwiązanie bazujące na warunkach I rzędu #
#####

```

```

spr3<-function(pomoc){
  c3<-pomoc
  u3<-U3
  u4<-U4
  b4<-(y4+u4)/(chi+r)/3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) +
    (y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-c3-r*b3)/(y3+u3))
  z3<-b4-b3
  i3<- z3 - (1+theta)*u3 - c3 - r*b3 + u3 + y3
  c4<-((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
    /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
    *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3)
  +(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
    /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
    *(((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+
    ((y4 - r*(b3 + theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3))/(y4+u4))))
  -(alpha*((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3))
    /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  +(alpha*(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
    /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  )
  k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3
  k5<-((1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) +
    (1-alpha)*u4 + (1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*
    ((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
    (y3- c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4 -r*b4)/(y4+u4))
  - (1+r)*(b3+ theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
  )
  i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4

  lewa<-((alpha/c3)
  +(alpha*beta*
    ((-(y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3)+r/(y4+u4))) - (1+r))
    /((y5+u5)/(chi+r)/3)
    * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+
    ((y4-r*b4)/(y4+u4)))
    -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
    +(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
  )
  )
  +beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*
    ((1/(y3+u3))+r/(y4+u4)))-(1+r))/k5
  )

  prawa<-((1-alpha)/k4
  +(beta*alpha*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta - r))
  /((

```

```

      ((y5+u5)/(chi+r)/3)
      * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+
          ((y4-r*b4)/(y4+u4)))
      -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
      +(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
    )
    +beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*
      (r/(y4+u4) -delta -r)/k5
    )
  pomo<-(
    -lewa/((chi+r)/(y4+u4) + 1/(3*(y3+u3)))
    +prawa/((chi+r)/(y4+u4))
  )
  return(c(pomo))
}

```

```

rozw<-c(nleqslv(c(0.5), spr3)$x)
rozw []<-rozw []
b4<-(y4+u4)/(chi+r)/3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) +
(y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-rozw-r*b3)/(y3+u3))

```

```

z3<-b4-b3
i3<-( z3 - (1+theta)*u3 - rozw - r*b3 + u3 + y3)
p<-c(rozw-0.000001, u3, i3)

```

```

c3<-p[1]
u3<-p[2]
i3<-p[3]

```

```

u4<-U4
c4<-(
  ((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3))
+(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  *(((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+
  ((y4 - r*(b3 + theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3))/(y4+u4))))
-(alpha*((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3))
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
+(alpha*(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
)
k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3
k5<-(
  (1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 +
  (1+theta)*u3 + i3) + (1-alpha)*u4 +
  (1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
  (y3- c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4 -r*b4)/(y4+u4))

```

```

)
- (1+r)*(b3+ theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4

```

```

#####
# Sprawdzenie #
#####

```

```

lewa<-(
+(alpha/c3)
+(alpha*beta*
((-(y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3)+r/(y4+u4))) - (1+r))
/(
((y5+u5)/(chi+r)/3)
* ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+
((y4-r*b4)/(y4+u4)))
-(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
+(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
)
)
+beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*
((1/(y3+u3))+r/(y4+u4))-(1+r))/k5
)

```

```

prawa<-(
+(1-alpha)/k4
+(beta*alpha*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta - r))
/(
((y5+u5)/(chi+r)/3)
* ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+
((y4-r*b4)/(y4+u4)))
-(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
+(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
)
+beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*
(r/(y4+u4)) -delta -r)/k5
)

```

```

pomo<-(
-lewa/(((chi+r)/(y4+u4) + 1/(3*(y3+u3)))
+prawa/(((chi+r)/(y4+u4)))

```

```

pomo
[1] 1.55792e-07

```

```

#####
# Podsumowanie rozwiazania z warunków I rzędu #
#####

```

```

> cat(c3, u3, i3)
0.7702612 0.2724817 0.5118063
> cat(c4, u4, i4)

```

```

0.9416476 0.2844733 0.1231489
> użyt ( c ( c3 , u3 , i3 ) )
[1] -0.6400479

```

D Model o nieskończonym horyzoncie czasowym

W tej części aneksu opisano model polityki finansowej JST, który stanowi uproszczenie głównego modelu omawianego w niniejszej pracy. Nie uwzględnia się w nim zadłużenia ani finansowania ze środków unijnych (inwestycje stanowią jeden agregat). Ponadto zakłada się w nim tę samą postać funkcji użyteczności, co w równaniu (1), ale o nieskończonym horyzoncie czasowym:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\alpha \ln c_t + (1 - \alpha) \ln k_{t+1})$$

p.w.

$$\begin{aligned} c_t + i_t &= y_t \\ y_t &= (1 + \gamma)y_{t-1} \\ k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + i_t \\ \forall c_t, k_t &\geq 0. \end{aligned}$$

Nie będziemy tu poszukiwać pełnego rozwiązania tego modelu, a jedynie wyprowadzimy długookresowe zależności, które będą przydatne w procesie kalibracji modelu czterookresowego w rozdziale 4.1. W modelu takim w długim okresie optymalne wielkości: c^* , i^* i k^* stanowią stały odsetek y , co oznacza występowanie ścieżki zrównoważonego wzrostu: wszystkie wspomniane zmienne rosną w długim okresie w tym samym tempie γ :

$$\begin{aligned} k^* &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_t^*}{y_t} \\ i^* &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i_t^*}{y_t} \\ c^* &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_t^*}{y_t} = 1 - \frac{i_t^*}{y_t}. \end{aligned}$$

W dalszej części aneksu pominięto oznaczenia $*$. Ani c_t , ani i_t nie mogą rosnąć szybciej niż y_t , ponieważ $c_t \leq y_t$ oraz $i_t \leq y_t$. Podobnie k_t nie może rosnąć szybciej niż γ , ponieważ wiązałyby się to ze wzrostem i_t szybszym niż γ . Nie byłoby również optymalne, gdyby tylko jedna zmienna c_t lub k_t rosła w tempie γ , ponieważ wówczas $c_t + i_t < y_t$, czyli część budżetu pozostawałaby niewykorzystana.

Można zaobserwować, że w długim okresie ($t \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} ky_t(1 + \gamma) &= ky_{t+1} = k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t = (1 - \delta)ky_t + iy_t \\ k(1 + \gamma - 1 + \delta) &= i \\ k &= \frac{i}{\gamma + \delta} = \frac{1 - c}{\gamma + \delta}. \end{aligned} \tag{27}$$

Wartość parametru δ na potrzeby kalibracji można więc uzyskać przy założeniu wartości domyślnych parametrów modelu otrzymanych w podrozdziale 4.1: $i = 0,19$ (lub, jeżeli chcieć

spełnić warunek $c + i = 1$, to: $i = 1 - c = 1 - 0,9 = 0,1$), $k = 2,06$, $\gamma = 0,044$ i korzystając z tego, że równanie (27) można przekształcić do postaci:

$$\delta = \frac{i}{k} - \gamma, \quad (28)$$

można przyjąć, że $\delta = \frac{0,19}{2,06} - 0,044 = 0,048$ (lub $\delta = \frac{0,1}{2,06} - 0,0044 = 0,005$). Jak zatem widać, w zależności od założonej wartości parametru i , δ jest bliska wartości oszacowanej w podrozdziale 4.1 lub bliska zeru.