Lekcja 4

Widmo sygnału

Cel

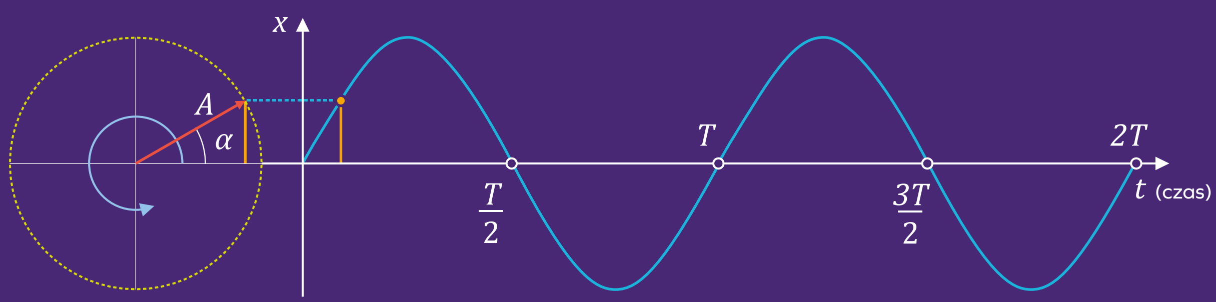
- Przedstawienie podstawowych pojęć związanych z widmową analizą sygnałów.

Efekty kształcenia

- Uczeń zna metodę sumowania sygnałów harmonicznych na diagramach wektorowych.
- Uczeń zna podstawowe cele analizy widmowej.
- Uczeń zna podstawowe sposoby reprezentacji sygnału: w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości.

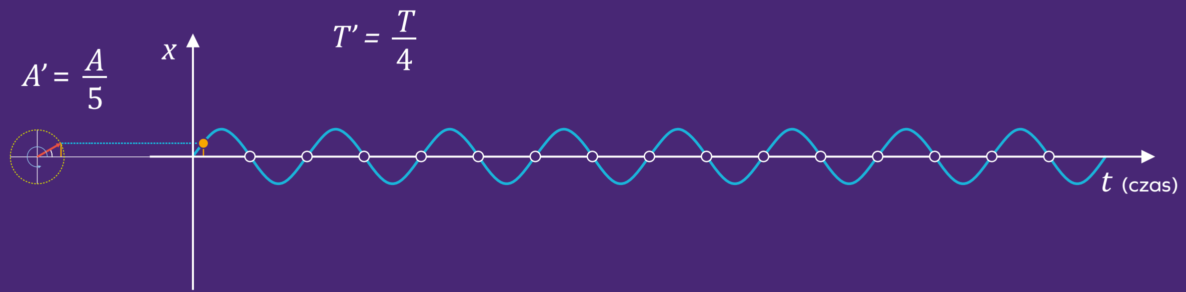
1. Sumowanie sygnałów harmonicznych

W Lekcji 3 wprowadziliśmy pojęcie fali harmonicznej, jako określonego zaburzenia, które można w pełni scharakteryzować przez podanie amplitudy, częstotliwości (lub okresu) i fazy. Ponieważ omawiane dotychczas fale harmoniczne związane były z zaburzeniem ośrodka lub pola fizycznego (fala akustyczna lub elektromagnetyczna), możemy je utożsamić z **sygnałem harmonicznym** (patrz Lekcja 1). Sygnał taki jest obrazem jednostajnego ruchu punktu po okręgu. Stanowi on przykład **sygnału okresowego**, tzn. takiego, dla którego można wskazać odcinek czasu, po którym zmiany wartości sygnału są dokładnie takie same jak w odcinku poprzednim. Sygnał harmoniczny będziemy traktować jako elementarny sygnał okresowy (Rys. 1).



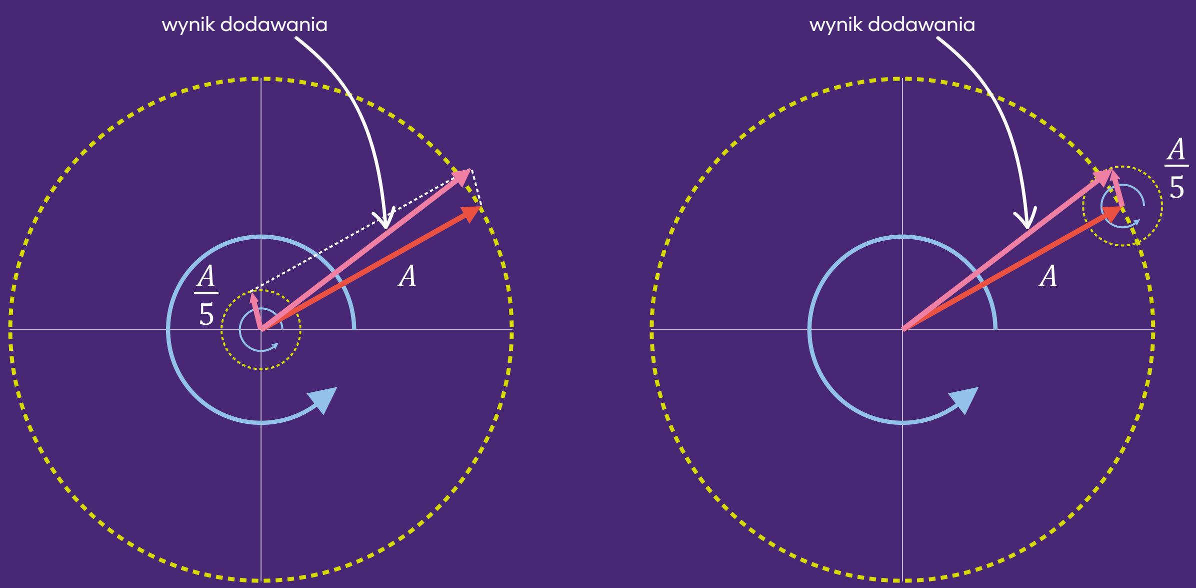
Rys. 1. Sygnał harmoniczny o amplitudzie A, okresie T oraz zerowej fazie początkowej.

Możemy oczywiście dobierać parametry sygnału harmonicznego zupełnie dowolnie. Na Rys. 2 przedstawiono przykład sygnału o pięciokrotnie mniejszej amplitudzie i czterokrotnie krótszym okresie w porównaniu do tego z Rys. 1. Sygnały te są zasadniczo podobne, różnią się jedynie skalą. Jednak wszystko się zmieni, jeśli dopuścimy pewne operacje matematyczne na tych sygnałach, w szczególności – sumowanie.



Rys. 2. Sygnał harmoniczny o pięciokrotnie mniejszej amplitudzie i czterokrotnie krótszym okresie.

Możemy takie sumowanie zrealizować bardzo prosto biorąc przebiegi sygnałów w czasie i dodając wartości sygnału w odpowiednich chwilach czasowych. Z punktu widzenia późniejszych lekcji, w szczególności analizy modulacji, przypatrzmy się jednak, jak dodawanie sygnałów harmonicznych wiąże się z dodawaniem wektorów.



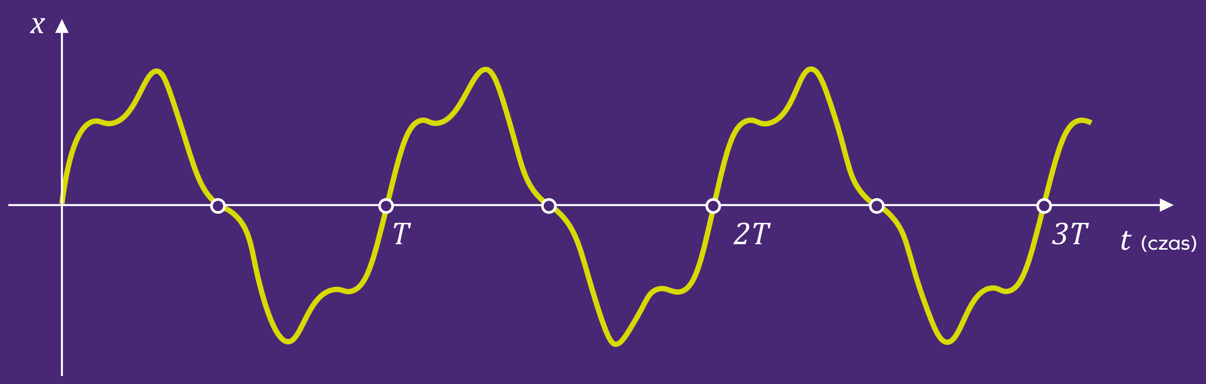
Rys. 3. Dodawanie dwóch sygnałów harmonicznych jako dodawanie obracających się wektorów. Po lewej zastosowanie reguły równoległoboku, po prawej – reguły łańcuchowej.

Sygnał harmoniczny reprezentowany jest nie tylko przez ruch punktu po okręgu, ale również przez obracający się wektor zaczepiony w środku okręgu i zakończony w poruszającym się punkcie (mówimy, że jest tzw. **wektor wodzący** punktu). Długość wektora równa jest amplitudzie sygnału, zaś czas pełnego obrotu równy jest okresowi sygnału.

Jeżeli chcemy dodać do siebie dwa sygnały harmoniczne, możemy nanieść na jeden diagram oba okręgi oraz wektory. Położenie wektorów będzie zależeć od wybranej chwili czasu – załóżmy, że wygląda tak, jak na Rys. 3 po lewej stronie, z obydwoma wektorami zaczepionymi w jednym punkcie. Wektory dodajemy wg reguły równoległoboku tzn. konstruujemy równoległobok, którego sąsiednimi bokami są oba wektory, zaś wynikiem działania jest wektor pokrywający się z przekątną równoległoboku. Otrzymujemy w ten sposób wektor wynikowy, którego długość zależy od wzajemnego położenia wektorów, które dodajemy (w tym przypadku jest nieco większa niż A). Podobnie jak na Rys. 1 i Rys. 2, wartość sygnału zależy od odległości końca tego wektora od prostej przebiegającej przez poziomą średnicę obu okręgów.

Wynik można otrzymać nieco prościej stosując tzw. regułę łańcuchową dodawania wektorów. W tym przypadku umieszczamy drugi okrąg tak, by jego środek pokrył się z końcem pierwszego wektora (Rys. 3 po prawej). Wektor wynikowy znajdujemy łącząc początek pierwszego wektora z końcem drugiego i oczywiście jest on taki sam, jak przy skorzystaniu z reguły równoległoboku.

Przeprowadzając powyższą procedurę dla wszystkich chwil czasowych w interesującym nas przedziale czasu, otrzymamy przebieg sygnału wynikowego (Rys. 4).



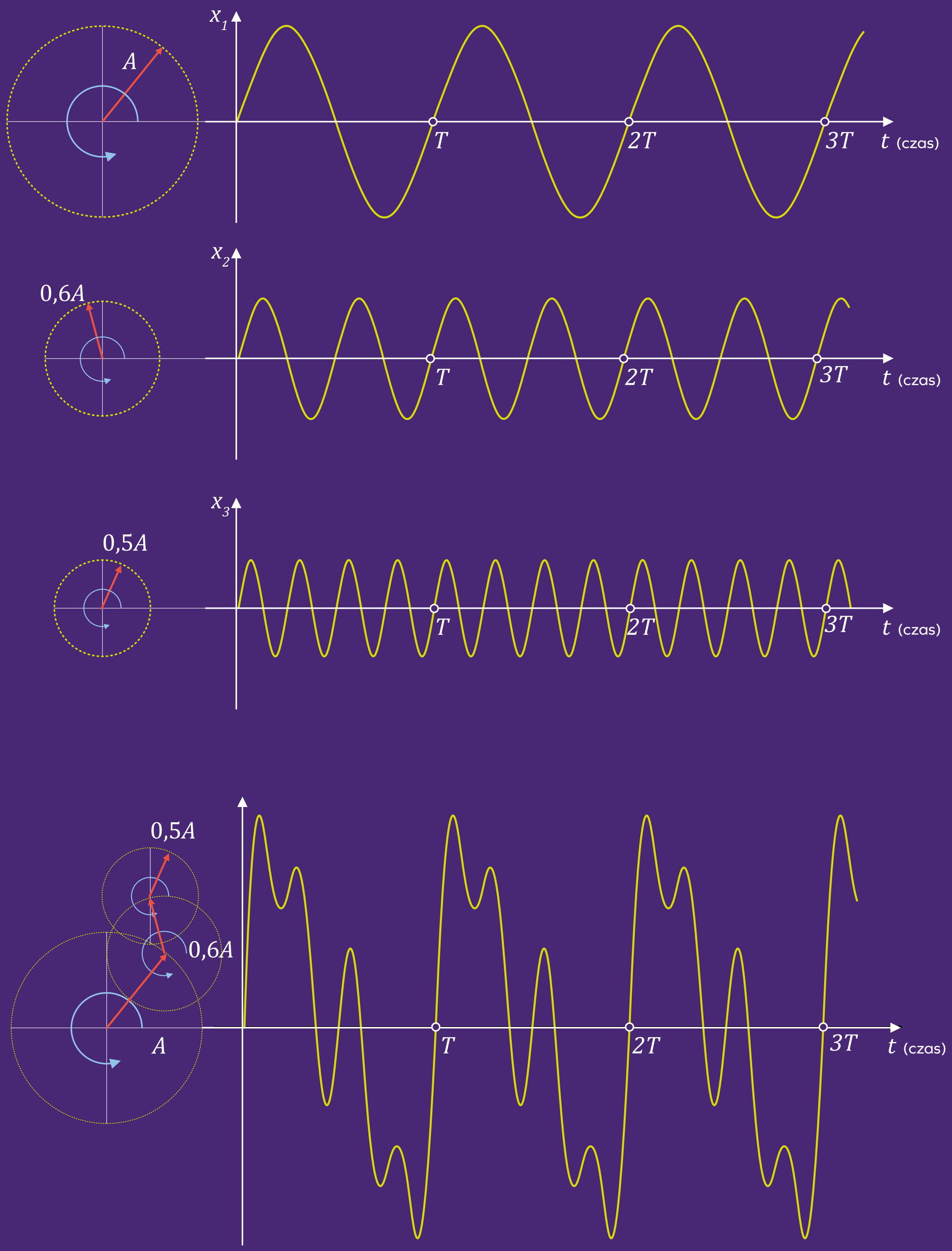
Rys. 4. Suma dwóch sygnałów harmonicznych.

Co możemy powiedzieć o tym sygnale? Jest to nadal sygnał okresowy. Jak widzimy jego okres równy jest okresowi sygnału o dłuższym okresie (T). To nie jest przypadek – tak będzie zawsze, gdy dodajemy sygnały o okresach, których jeden jest wielokrotnością drugiego (w naszym przypadku sygnał o okresie T jest czterokrotnością okresu krótszego). Poza tym, przebieg sygnału w czasie jest bardzo podobny do sygnału o większej amplitudzie. Sygnał o mniejszej amplitudzie wprowadza do niego niewielkie, aczkolwiek wyraźne zakłócenia.

Nic nie stoi na przeszkodzie, by dodać do siebie większą liczbę sygnałów. Na Rys. 5 widzimy przykład sumy trzech sygnałów o parametrach odpowiednio (amplituda, okres): a) A, T; b) $0{,}6A$, $0{,}5T$; c) $0{,}5A$, $0{,}25T$. Obok każdego z wykresów załączono także przykładowy diagram kołowy w wybranej chwili czasowej. Suma poszczególnych sygnałów harmonicznych przedstawiona na ostatnim wykresie jest dość złożonym sygnałem okresowym o okresie T.

Ponieważ częstotliwość sygnału jest odwrotnością okresu, możemy zauważyć, że częstotliwość sygnału drugiego jest dwukrotnie większa niż częstotliwość sygnału pierwszego, zaś częstotliwość sygnału trzeciego jest czterokrotnie większa niż częstotliwość sygnału pierwszego. Możemy zatem sformułować następujące twierdzenie: ***jeżeli sumujemy kolejno sygnały harmoniczne poczynając od sygnału o okresie T, otrzymujemy w wyniku sygnał również o okresie T, pod warunkiem, że częstotliwości kolejnych sygnałów są wielokrotnością częstości pierwszego sygnału***.

W podobny sposób możemy dodawać do siebie dowolną liczbę sygnałów harmonicznych, nawet nieskończoną, jeżeli tylko amplitudy kolejnych sygnałów zmniejszają się wystarczająco szybko przy przejściu z sygnału na sygnał.



Rys. 5. **Suma trzech sygnałów harmonicznych.**

2. Analiza widmowa

Złożoność sygnału widocznego na Rys. 5 może zainspirować nas do pytania: a może każdy sygnał okresowy da się przedstawić jako sumę sygnałów harmonicznych? Okazuje się, że tak!

Uwaga: *istnieją pewne wyjątki, ale w praktyce nie musimy się nimi przejmować.*

Procedura, którą się teraz zajmiemy jest więc niejako odwrotna do tego, co robiliśmy powyżej. Zamiast dodawać do siebie sygnały harmoniczne i generować coraz to bardziej skomplikowane przebiegi w czasie, możemy wziąć określony sygnał okresowy i spróbować znaleźć takie sygnały harmoniczne, które po złożeniu (zsumowaniu) utworzą żądany sygnał.

Procedura taka nazywa się **analizą widmową** (inne nazwy: analiza spektralna, analiza Fouriera). Dla sygnału o okresie T analiza widmowa polega na ustaleniu amplitudy sygnałów harmonicznych (tzw. składowych) o częstotliwościach $f_1 = 1/T$, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$, itd. będących składnikami tego sygnału. Pierwsza z tych składowych o częstotliwości $f_1 = 1/T$ nazywana jest **pierwszą harmoniczną**, druga – o częstotliwości dwa razy większej – drugą **harmoniczną**, itd. Niektóre sygnały zawierają nawet nieskończenie wiele niezerowych harmonicznych (zobaczymy przykład za chwilę).

Jak w praktyce przeprowadzić analizę widmową, czyli jak wyznaczyć amplitudy harmonicznych dla danego sygnału? Istnieją pewne formuły matematyczne, które pozwalają to zrobić, ale są zbyt skomplikowane, by je tutaj przytoczyć. Możemy za to łatwo pokazać efekt działania analizy widmowej dla sygnałów z Rys. 4 i Rys. 5, bo sami wcześniej wybraliśmy składowe tych sygnałów.

Zatem, dla sygnału z Rys. 4, pierwsza harmoniczna f_1 ma amplitudę, którą oznaczyliśmy przez A, zaś druga harmoniczna f_2 ma amplitudę pięć razy mniejszą ($A/5$). Wszystkie następne harmoniczne nie są nam potrzebne, dlatego możemy im przypisać amplitudę równą 0.

Dla sygnału z Rys. 5, pierwsza harmoniczna f_1 ma amplitudę A, druga – f_2 – ma amplitudę $0{,}6\,A$, trzecia – f_3 – ma amplitudę zerową (nie występuje w sygnale), zaś czwarta – f_4 – ma amplitudę $0{,}5\,A$. Wszystkie następne harmoniczne mają amplitudę równą 0.

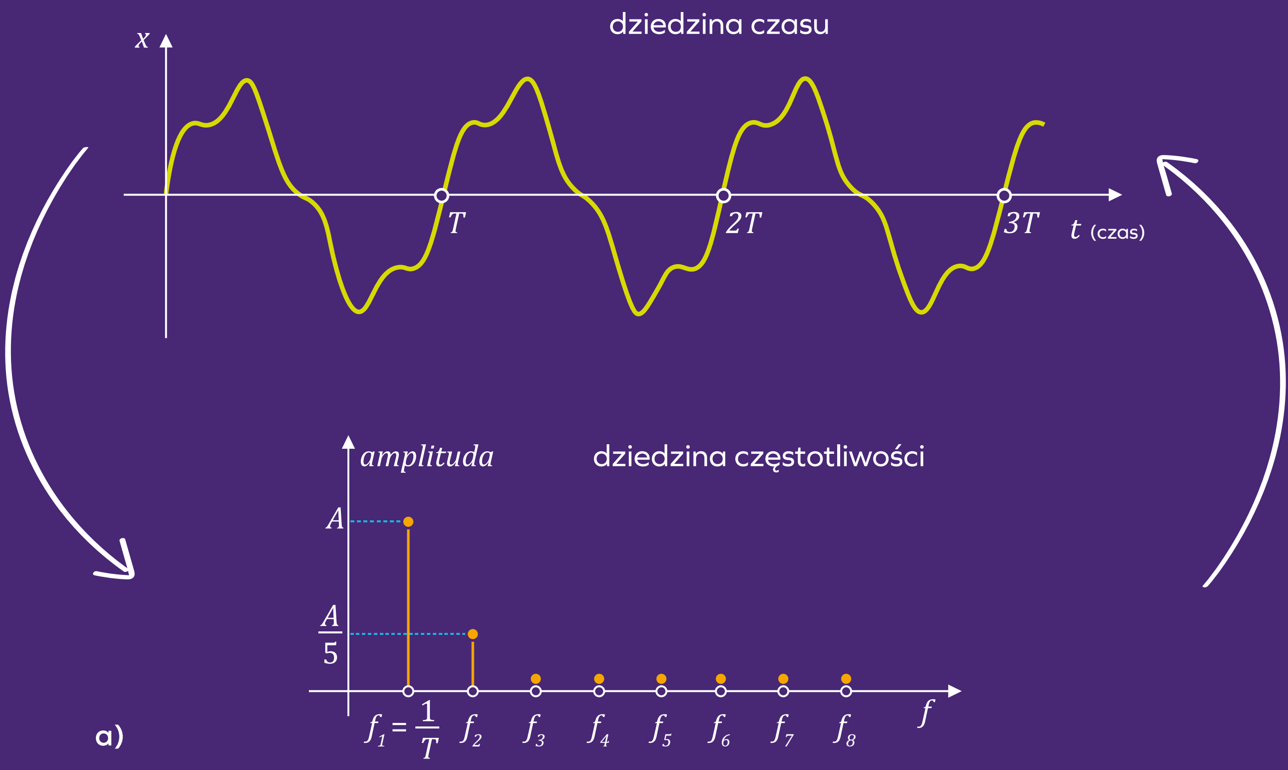
Informacja o amplitudach harmonicznych mówi nam o sygnale okresowym dokładnie to samo, co jego przebieg w czasie. Mamy zatem dwie możliwości opisu sygnału:

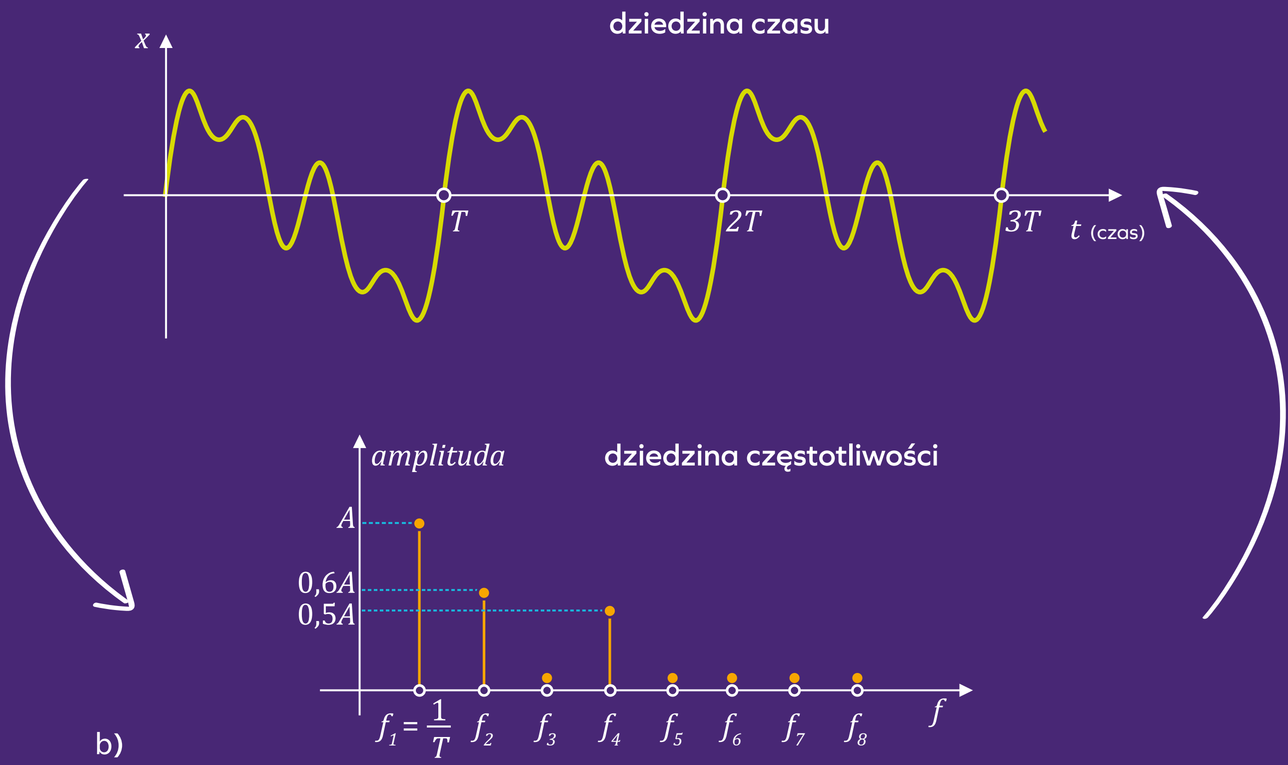
1. Podanie wartości sygnału w czasie dla każdej chwili czasowej t. Jest to tzw. opis w dziedzinie **czasu**.

2. Podanie amplitudy harmonicznych tego sygnału. Jest to tzw. opis w **dziedzinie częstotliwości**.

Przywykliśmy do opisu w dziedzinie czasu polegającym na wykonaniu wykresu z osią poziomą odpowiadającą chwili czasowej i z osią pionową dotyczącą wartości sygnału. Podobnie dla opisu w dziedzinie częstotliwości możemy wykonać podobny wykres, w którym na osi poziomej wyszczególnimy, o którą harmoniczną chodzi (lub podamy wartość jej częstotliwości), zaś na osi pionowej zaznaczymy jej amplitudę. Zwyczajowo amplitudę harmonicznej nanosi się na tym wykresie w formie słupka (tzw. prążka), zamiast punktu. Rys. 6 pokazuje przykładowe porównanie obu opisów dla znanych nam już sygnałów.

Przedstawienie sygnału w dziedzinie częstotliwości nazywamy także **widmem** (lub **spektrum**) sygnału.



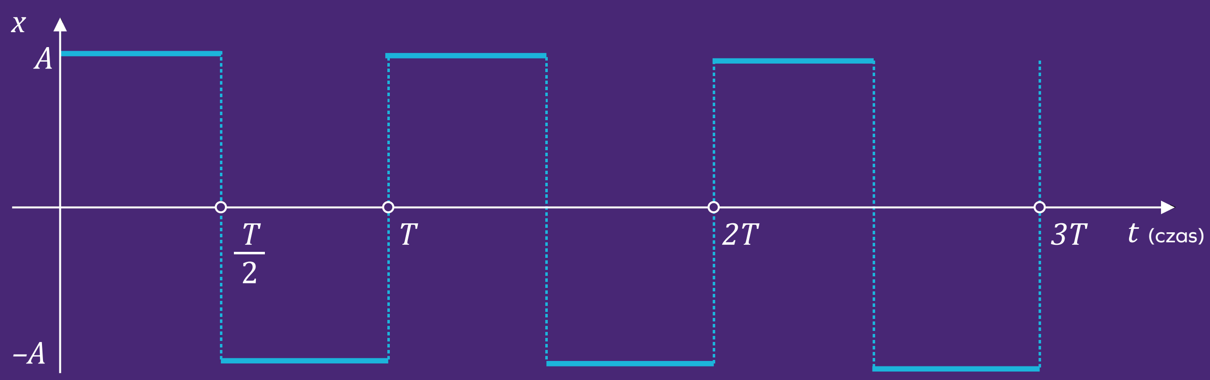


Rys. 6. Opis sygnału w dziedzinie czasu i częstotliwości: a) sygnał o dwóch harmonicznych, b) sygnał o trzech harmonicznych.

3. Przykład — analiza widmowa sygnału prostokątnego

Jako ciekawy przykład rozpatrzmy teraz sygnał, który tradycyjnie nazywany jest **sygnałem prostokątnym**. W ciągu okresu T sygnał ten przyjmuje tylko dwie wartości: A – w pierwszej połowie okresu oraz - A – w drugiej połowie okresu (Rys. 7).

Sygnał ten różni się znacznie od tych, które analizowaliśmy do tej pory. Przede wszystkim nie jest to sygnał ciągły – co połowę okresu obserwujemy nagłą zmianę wartości. W niczym nie przypomina regularnego i gładkiego sygnału harmonicznego. Możemy go traktować jako przykład sygnału cyfrowego o dwóch poziomach (binarnego; patrz Lekcja 1). A jednak okazuje się, że nawet sygnał tego rodzaju może być poddany analizie widmowej i możemy dokładnie wyznaczyć jego harmoniczne. Niestety, w tym przypadku jest ich nieskończenie wiele, musimy zatem zadowolić się przybliżeniami.



Rys. 7. Sygnał prostokątny o okresie T i amplitudzie A.

Na Rys. 8 możemy zobaczyć pierwszych kilka harmonicznych sygnału prostokątnego. Pierwsza harmoniczna (linia czerwona) jest sygnałem o okresie T dość dobrze oddającym ogólną zmienność w czasie i poziomy osiągane przez interesujący nas sygnał. Druga harmoniczna oraz pozostałe składowe o parzystej krotności (czwarta, szósta, itd.) posiadają amplitudę równą zeru. Trzecia, piąta, siódma i dziewiąta harmoniczna zaznaczone są jako sygnały o coraz to mniejszych amplitudach.

Dla zainteresowanych. *Amplitudę a_n n-tej nieparzystej harmonicznej można obliczyć ze wzoru:*

$$a_n = \frac{4A}{n\pi}$$

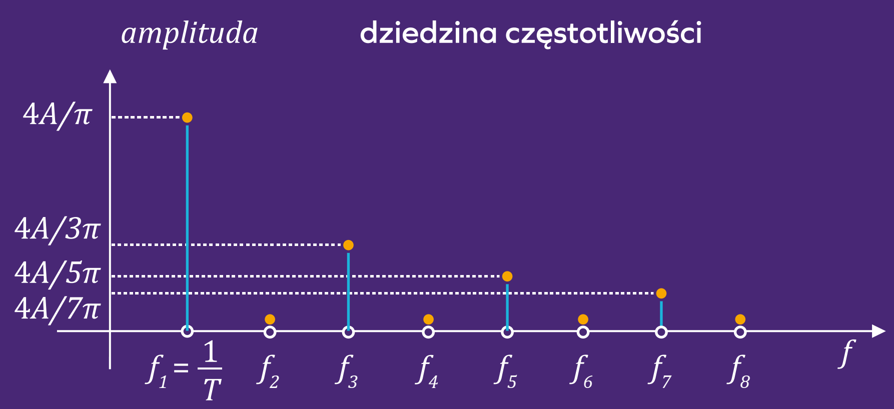
Sumę pięciu pierwszych niezerowych harmonicznych zaznaczono kolorem żółtym. Jak widać jest to całkiem dobre przybliżenie sygnału prostokątnego mimo widocznych zafalowań wokół przyjmowanych przez niego wartości. W zaawansowanej analizie sygnałów wykazuje się, że po dodaniu nieskończonej liczby harmonicznych zafalowania znikają i uzyskujemy dokładnie przebieg z Rys. 7.

Przedstawienie sygnału prostokątnego w dziedzinie częstotliwości, czyli jego widmo, zawiera Rys. 9. Jak widzimy, wszystkie parzyste prążki są równe 0, zaś nieparzyste stopniowo maleją do zera wraz ze wzrostem numeru harmonicznej.

Zastosowań praktycznych analizy widmowej jest mnóstwo i nie będziemy wszystkich tu wymieniać. Jednym z nich jest np. komputerowe rozpoznawanie mowy. Na podstawie amplitudy poszczególnych harmonicznych w sygnale głosowym komputer może zidentyfikować wymawiane głoski (każda ma charakterystyczne widmo) i w dalszej kolejności wyrazy oraz zdania.

Z naszego punktu widzenia analiza widmowa pozwoli nam dogłębnie zrozumieć działanie technik modulacji (Lekcje 7, 8, 9) oraz podział zakresów częstotliwości pomiędzy różnych użytkowników w telekomunikacji mobilnej (Lekcje 5, 10).

Rys. 8. Harmoniczne sygnału prostokątnego w dziedzinie czasu.



Rys. 9. Amplitudy pierwszych ośmiu harmonicznych sygnału prostokątnego (część widma).

Doświadczenie

Na stronie internetowej **compadre.org** możesz uruchomić program Soundanalyzer do analizy dźwięku rejestrowanego przez mikrofon komputera (konieczne jest zezwolenie aplikacji na instalację oraz na dostęp do mikrofonu). Okno aplikacji (Rys. 10) zawiera w górnej części widmo sygnału, zaś w dolnej – obraz w dziedzinie czasu. Maksymalna wartość częstotliwości to $10\,\mathrm{kHz}$.

Zeskanuj QR kod

Rys. 10. Okno aplikacji Soundanalyzer.

Zanim przejdziemy do doświadczenia zwróćmy uwagę, że normalny komunikat głosowy nie jest sygnałem okresowym. Możemy go jednak podzielić na bardzo krótkie fragmenty, które będziemy traktować jako wycinki sygnału okresowego (próbki), które poddajemy już normalnej analizie widmowej. Ponieważ sygnał może znacznie się zmieniać pomiędzy kolejnymi próbkami, obraz sygnału w dziedzinie częstotliwości (widmo) także może podlegać zmianom w czasie.

Wykorzystaj aplikację do następujących obserwacji:

1. Zaobserwuj przebiegi w dziedzinie czasu i częstotliwości, kiedy mówisz swobodnie do mikrofonu. Które z częstotliwości pojawiają się najczęściej?
2. Porównaj przebiegi sygnałów przy wymawianiu samogłosek i spółgłosek szczelinowych (w szczególności „s”). Spróbuj utrzymać emisję tych głosek tak długo, jak potrafisz. Jakie widzisz różnice w rozkładzie częstotliwości?
3. Spróbuj emisji jednej samogłoski (np. „u”) zmieniając wysokość dźwięku – od najniższego do najwyższego. Czy obserwowany rozkład częstotliwości oddaje te zmiany?

4. Jeżeli posiadasz klawiszowy instrument muzyczny, wykorzystaj go do emisji różnych dźwięków o różnych wysokościach. Niektóre z instrumentów pozwalają na wybór czystego tonu (ang. *sine wave*). Sprawdź, czy rozkład częstotliwości zgadza się z Twoimi oczekiwaniami.

Słowniczek

Analiza widmowa – rozkład sygnału na harmoniczne sygnały składowe.

Dziedzina czasu – metoda opisu sygnału poprzez podanie wartości sygnału w każdej chwili czasowej.

Dziedzina częstotliwości – metoda opisu sygnału poprzez podanie amplitud jego kolejnych harmonicznych.

Harmoniczna – sygnał harmoniczny będący częścią składową danego sygnału. Częstotliwości kolejnych harmonicznych sygnału okresowego są wielokrotnością częstotliwości podstawowej równej odwrotności okresu sygnału.

Sygnał harmoniczny – sygnał, którego wartość w dziedzinie czasu można przedstawić jako obraz jednostajnego ruchu punktu po okręgu lub jednostajnego obrotu wektora wodzącego.

Sygnał okresowy – sygnał posiadający okres, czyli czas, po którym wartość sygnału się powtarza.

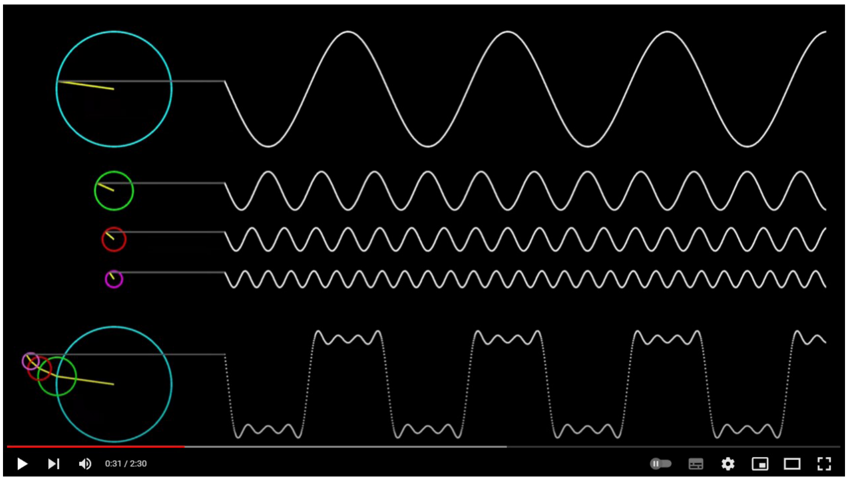
Sygnał prostokątny – sygnał okresowy, który naprzemiennie przyjmuje tylko dwie wartości, przy czym zmiana następuje w połowie okresu. Przykład sygnału cyfrowego, binarnego.

Wektor wodzący – wektor zaczepiony w punkcie odniesienia i zakończony w punkcie, którego ruch śledzimy.

Widmo (lub spektrum) sygnału – rozkład amplitud kolejnych harmonicznych sygnału.

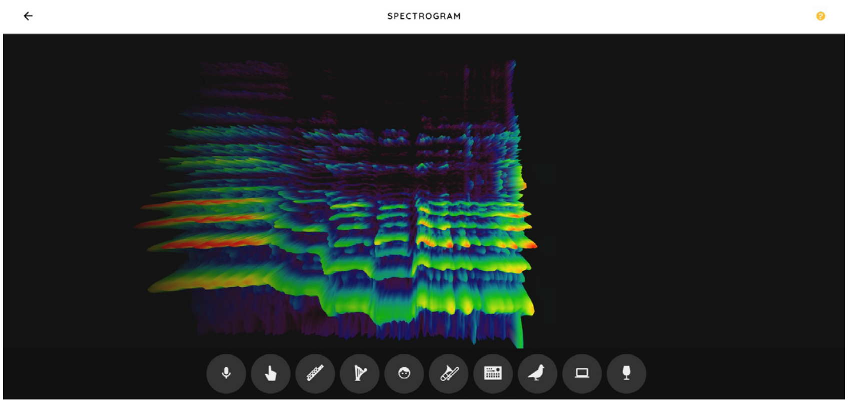
Materiały zewnętrzne

1. Animacja obrazująca sumowanie czterech pierwszych niezerowych harmonicznych sygnału prostokątnego (tytuł filmu: *Fourier Series Square Wave*).



Zeskanuj QR kod

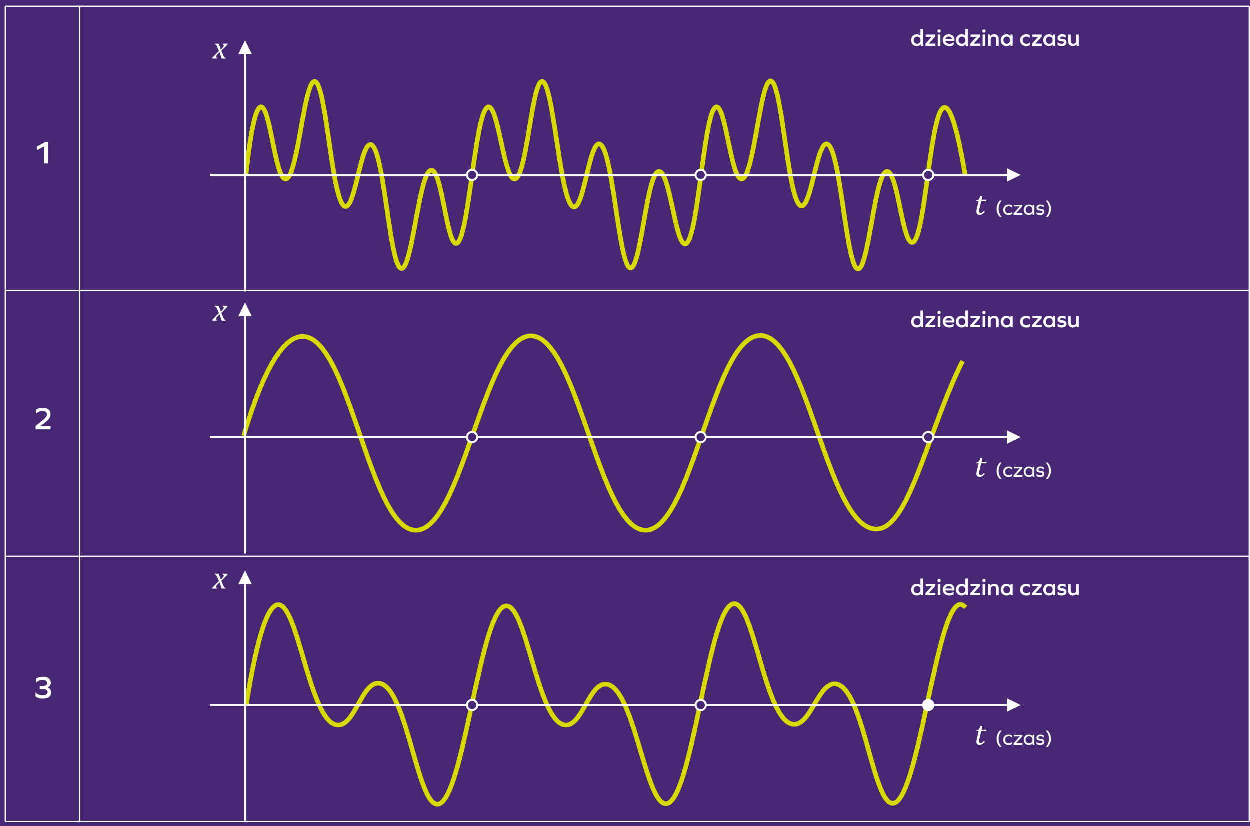
2. **Program do analizy widmowej dźwięku z mikrofonu**. Generuje tzw. **spektrogram**, czyli pokazuje w czasie rzeczywistym rozkład częstotliwości w rejestrowanym przez mikrofon dźwięku. Oś pozioma reprezentuje czas pobrania próbki dźwiękowej (obraz dynamicznie przesuwa się w kierunku poziomym), zaś oś pionowa – częstotliwość. Kolor odpowiada amplitudzie danej harmonicznej (czerwony – duża amplituda, niebieski – mała). Ponieważ nie podano skali na osiach oraz ilościowego przypisania koloru do amplitud, spektrogram ma charakter wyłącznie poglądowy. Podkreślmy także, że obraz sygnału jest tu przedstawiany w dziedzinie częstotliwości, ale dla ciągle zmieniających się próbek czasowych.

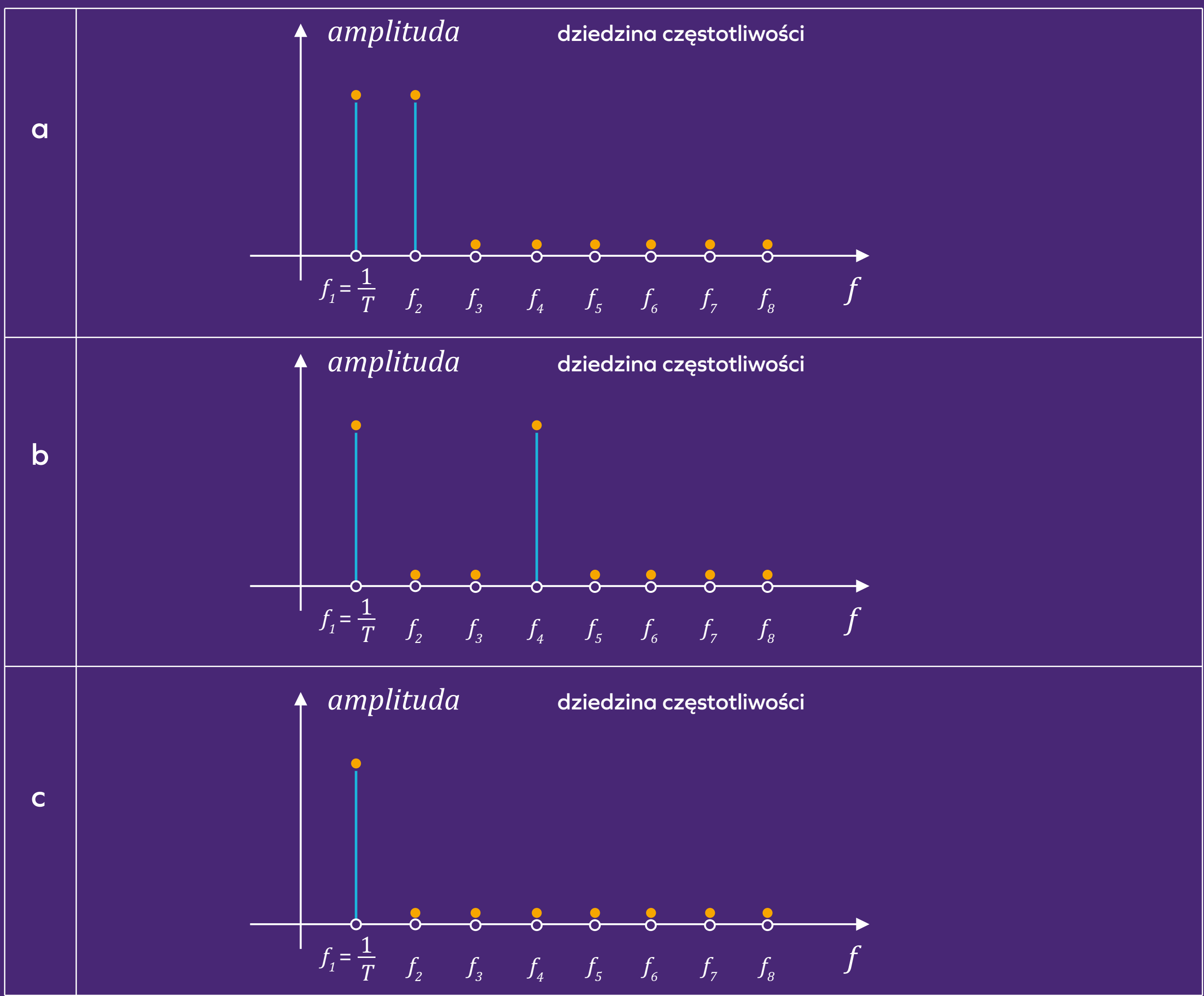


Zeskanuj QR kod

Praca domowa

Spróbuj przypisać przedstawienie sygnałów w dziedzinie czasu do odpowiedniego przedstawienia w dziedzinie częstotliwości (widma).


1
x
dziedzina czasu
t (czas)
2
x
dziedzina czasu
t (czas)
3
x
dziedzina czasu
t (czas)


a
amplituda
dziedzina częstotliwości
$f_1 = \frac{1}{T}$ f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7 f_8 f
b
amplituda
dziedzina częstotliwości
$f_1 = \frac{1}{T}$ f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7 f_8 f
c
amplituda
dziedzina częstotliwości
$f_1 = \frac{1}{T}$ f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7 f_8 f